

Análisis empírico para la conversión de las probabilidades de “*default*” a “*spreads*” de crédito para el caso mexicano

Janko Hernández Cortés

Paula B. Morales Bañuelos

Resumen

El objetivo del presente estudio es identificar el modelo que aproxime de la mejor manera el *spread* de crédito que debe ser fijado sobre los instrumentos de deuda que sean emitidos tanto por empresas públicas como privadas, considerando las particularidades del mercado mexicano. Adicionalmente, se busca que en particular las empresas que no tienen acceso a una calificación crediticia otorgada por una sociedad calificadora, puedan extrapolar el resultado de dichos modelos a su información. En particular se analizaron tres modelos: el de Merton, el *Brownian Motion Model* (BM) y el *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM).

De acuerdo con el análisis realizado sobre la información del mercado mexicano, se llegó exactamente a la misma conclusión alcanzada por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil (2005), esto es, el modelo que aproxima en mayor medida el *spread* de crédito real es el PLBM. Asimismo, concordando con el resultado obtenido por Teixeira (2005), el modelo que presentó el peor ajuste y que adicionalmente, resultó ser el menos aplicable por requerir información de mercado (lo cual representa la principal limitante para el caso mexicano) fue el modelo de Merton (1974). Adicionalmente, se pudo observar en los resultados de los modelos BM y PLBM y por consecuencia el valor del estadístico de prueba (G) dependen en gran medida de la tasa de recuperación promedio de los préstamos. Por lo que, considerando esta situación y dado que en México se carece de información a este respecto, se probaron seis modelos de regresión simple, tomando como variable explicativa a la probabilidad de *default* a un año (EDF) y como variable explicada a la tasa de recuperación. Llegando a la conclusión que el mejor ajuste se obtiene aplicando una regresión logística sobre los datos, mediante el cual las empresas privadas podrán aproximar su tasa de recuperación.

Palabras Clave: Riesgo de incumplimiento (*default*), *spread* de crédito, probabilidades esperadas de *default*, probabilidades neutrales de *default*, Modelo de Merton, *Brownian Motion Model* (BM) y *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM).

1. Introducción

La naturaleza de las empresas obliga a que se deba pagar o estar dispuesto a pagar un precio por los bienes y servicios que serán utilizados en las actividades del negocio, cualquiera que sea el giro de que se trate. Por lo anterior, es evidente que las empresas requieren de recursos financieros que les permitan realizar los pagos necesarios para el desempeño de sus actividades.

Como es bien sabido, existen tres fuentes principales de financiamiento: los recursos internos generados por la misma entidad, los aportados por los socios de la empresa y los obtenidos a través de la figura de la deuda.

Generalmente, una empresa se endeuda de acuerdo con las características de los productos o servicios ofrecidos, la etapa comercial del negocio, el tipo de mercado donde se encuentra la empresa, restricciones legales y fiscales, entre otros.

El costo de la deuda tiene una relación directa entre otros factores, con la situación financiera, con la situación geográfica y con las características de la industria donde se encuentra la entidad. Asimismo, esta tasa de interés debe incorporar el riesgo de no pago de empresa emisora.

De acuerdo con Meter Crosbie y Jef Bohn (2003), el riesgo de no pago ó de *default* se define como “la incertidumbre de que una empresa no tenga la posibilidad de cubrir su deuda”. Sin embargo, antes de que la empresa incumpla con el pago de su deuda, no existe forma exacta de discriminar a las empresas que van a caer en *default* de las que no van a incumplir con el pago de dicha fuente de financiamiento. Por lo cual resulta necesario que se efectúe una evaluación de carácter probabilística de forma que se determine la probabilidad de *default*.

Considerando lo anterior, es indispensable que las firmas ofrezcan una prima sobre la tasa libre de riesgo (*spread*), de forma tal que se compense a los acreedores por este riesgo de incumplimiento. La cual deberá ser grande si la probabilidad de *default* es alta y menor cuando la probabilidad de no pago sea baja.

De acuerdo con los autores antes mencionados, existen tres factores claves para la determinación de la probabilidad de *default*:

- **Valor de los activos**, representa el valor de mercado de los activos de una empresa. Esta es una medida del valor presente de los flujos de efectivo libre derivados de los activos de una compañía, descontados a la tasa de descuento que refleje el riesgo de la misma. Asimismo, este valor incluye las expectativas y la información relevante de la industria donde se encuentra la firma, así como factores económicos.
- **Riesgo de los activos**, este concepto se refiere al riesgo en el valor de los activos. Representa un medidor del riesgo del negocio así como del riesgo de la industria. El valor de los activos de una firma es un estimado, por lo cual es incierto; en consecuencia, este valor debe ser entendido dentro del contexto del riesgo del negocio.
- **Apalancamiento**, representa la proporción de la empresa financiada con deuda. Esta proporción puede ser determinada comparando el valor en libros de la deuda contra el valor de mercado de los activos de la empresa.

El riesgo de *default* de una empresa se incrementa conforme el valor de los activos se aproxima al valor en libros de la deuda.

En términos generales, se puede decir que una empresa cae en incumplimiento cuando el valor de los activos resulta insuficiente para pagar el importe de su deuda; sin embargo Crosbie y Bohn (2003) encontraron que el punto de *default* depende en mayor medida de la relación entre la deuda de corto plazo y la de largo plazo. De hecho es mayor la probabilidad de incumplimiento cuando las empresas se encuentran financiadas en su mayor parte con deuda de corto plazo. Lo anterior resulta lógico al considerar la posibilidad de que a mayor plazo, la empresa tendrá una posibilidad de obtener el flujo necesario para cubrir el importe de la deuda.

El valor neto relevante de una empresa es igual a al valor de mercado de sus activos menos su punto de incumplimiento es decir:

$$\text{Valor neto de mercado de la empresa} = \text{Valor de mercado de los activos} - \text{Punto de } default \quad (1.1)$$

Por otro lado, el riesgo de los activos es aproximado con la volatilidad de los mismos, es decir, la desviación estándar del cambio porcentual en el valor de los activos durante un periodo de tiempo determinado.

Estos conceptos pueden ser combinados en una sola medida del riesgo de *default* llamada **distancia al default** (DD), la cual compara el valor neto de mercado con la desviación estándar del cambio porcentual en el valor de los activos, como se muestra en la siguiente fórmula:

$$DD = \frac{[\text{Valor_de_mercado_de_los_activos}] - [\text{Punto_de_default}]}{[\text{Valor_de_mercado_de_los_activos}] - [\text{Volatilidad_de_los_activos}]} \quad (1.2)$$

La distancia al *default* combina elementos claves para la determinación del riesgo de incumplimiento: el valor de los activos de la empresa, la volatilidad de los mismos, los riesgos de la industria y del negocio, los efectos de la firma, la situación geográfica y el tamaño de la compañía (estos últimos cuatro factores se encuentran incorporados en el valor de mercado de los activos).

Con base en la distancia al *default* puede calcularse la probabilidad de *default*, si se conoce la distribución de probabilidad de los activos de la empresa o bien si se conoce la tasa de *default* para cierta distancia de incumplimiento.

Las fuentes de información más importantes para que una empresa determine su probabilidad de incumplimiento son sus estados financieros, los precios de mercado de la deuda y del capital accionario así como sus calificaciones de riesgo emitidas por empresas calificadoras.

Esta información es importante, ya que con ella se puede aproximar el desempeño futuro de la compañía. En este sentido, de acuerdo con estudios que han realizado Crosbie y Bohn (2003), la información de mercado tiene un buen poder predictivo en la estimación de las probabilidades de incumplimiento.

Derivado de lo anterior, Oldrich Vasicek y Stephen Kealhofer (2003) extendieron el modelo de valuación de opciones financieras desarrollado originalmente Robert C. Merton y ampliado y publicado posteriormente por Fischer Black y Myron Scholes (Black & Scholes) en 1973, con objeto de calcular las probabilidades de *default*, el cual es conocido como Vasicek-Kealhofer (VK).

Este modelo asume que el capital accionario de la empresa es similar a una opción perpetua mientras que el punto de *default* actúa como una barrea para el valor de la firma. Si el valor de los activos toca ese punto, entonces se puede decir que la empresa no podrá cumplir con el pago de la deuda.

Bajo este modelo, el importe de la deuda y del capital accionario son considerados como instrumentos derivados que dependen del valor de la empresa y bajo esta premisa se puede calcular la volatilidad implícita de mercado del valor de los activos.

En resumen, la probabilidad de *default* depende de seis variables: el valor actual de los activos; la distribución de probabilidad de los activos al periodo de tiempo H; la volatilidad del valor de los activos calculada con el modelo de VK al tiempo H; el punto de *default* y el valor en libros de la deuda; la tasa de crecimiento esperada en el valor de los activos al tiempo H y la longitud del horizonte de tiempo (H).

La probabilidad de *default* representa la posibilidad de que el valor de los activos se encuentre por debajo del punto de *default*, la cual es denotada por sus siglas en inglés como EDF (*Expected Default Frequency*) ó frecuencia esperada de incumplimiento.

La empresa calificadora Moody's Investor Service, desarrolló un sistema que otorga la usuario la frecuencia esperada de pago. Este resultado describe la probabilidad anual de *default* para el siguiente año.

Moody's cuenta con una base de datos de más de 250,000 compañías a lo largo de diferentes periodos, así como 4,700 incidentes de *default* o bancarrota. Con esta información calcularon la distancia de *default*, el diagrama de frecuencias de empresas que se han ido a la quiebra y la probabilidad de *default*.

Con esta información y la situación financiera de la empresa bajo análisis, el sistema de Moody's otorga una calificación crediticia a los diferentes emisores.

De acuerdo con Moody's, la mejor calificación que puede obtener una organización y/o un instrumento es Aaa, lo cual significaría que no existe la menor posibilidad de que la organización no pague a sus deudores. En segundo lugar, se encuentra una calificación de Aa, seguido en orden de menor a mayor riesgo, por A, Baa, Ba, B y Caa.

Con el objeto de crear un análisis más fino, esta calificadora segmentó cada categoría en Aa1, Aa2, Aa3, A1, A2, A3 y así sucesivamente hasta llegar a la de mayor riesgo Caa.

Estas calificaciones tienen por objeto el proporcionar información sobre las probabilidades de *default* de un instrumento o de un negocio, y se esperaría que éstas se mantuvieran relativamente estables a lo largo del tiempo. Sin embargo estos *ratings* deben cambiar cuando se ha modificado de manera significativa la calidad crediticia de la entidad y se espera que este cambio permanezca en el largo plazo.

Una vez que se ha determinado el EDF, el siguiente paso es convertir esta probabilidad en los *spread* de crédito que deben agregarse a la tasa libre de riesgo, considerando el riesgo propio de la compañía.

Además de las empresas calificadoras, los bancos poseen calificaciones internas por medio de las cuales pueden determinar las probabilidades de *default* de sus clientes. Generalmente estos *ratings* internos consideran entre otros factores, razones de rentabilidad, retornos sobre la inversión, razones de liquidez, nivel de apalancamiento pero sobre todo la capacidad de la entidad para generar el efectivo necesario para cubrir sus deudas.

De acuerdo con la calificación otorgada por la empresa calificadora o por la institución de crédito, éstas establecen la tasa de interés que debe fijarse sobre los préstamos que se van a otorgar o el rendimiento a vencimiento que debe dar el bono que emita la entidad que se va a financiar. En términos generales la calificación crediticia determina el costo de oportunidad de la deuda.

Sin embargo, la mayor parte de las empresas mexicanas no poseen la capacidad económica para ser calificadas por una entidad especializada, generalmente son las empresas públicas o con fuerte poder adquisitivo las que tienen acceso ser calificadas por empresas especializadas, como por ejemplo Moody's, ya que los honorarios de estas entidades son muy altos. En contraste, las empresas privadas no poseen la capacidad económica para contratar los servicios de una entidad calificadora, por lo cual, les resulta sumamente complicado determinar el verdadero costo de oportunidad de la deuda.

Este problema se acentúa cuando los préstamos se realizan entre partes relacionadas y no se cuenta con la calificación crediticia de la entidad emisora del instrumento de deuda, ya que en estos casos, la transacción pudiera encontrarse afectada por los diferentes intereses económicos de las partes, teniendo como consecuencia la fijación de un *spread* de crédito que no cumpliera con el principio de valor de mercado.

Asimismo, resulta importante mencionar que en México la proporción de empresas públicas es muy pequeña, por lo cual la mayor parte de las empresas no poseen una calificación crediticia determinada por una organización especializada. Derivado de lo anterior, resulta necesario encontrar una metodología que pueda ser aplicada por estas entidades, de forma tal, que el costo de la deuda sea directamente proporcional al riesgo de *default* de la empresa emisora.

Como se comentó anteriormente, Moody's desarrolló una base de datos que permite determinar la EDF. Este sistema puede ser adquirido por cualquier empresa privada, sin embargo prevalece el problema de convertir esta probabilidad de *default* en el *spread* que debe ser adicionado a una tasa base libre de riesgo.

Para resolver este problema, Merton (1974) desarrolló un modelo que puede ser utilizado para obtener las probabilidades neutrales de *default* así como los *spread* de crédito que deben ser agregados a la tasa base. Posteriormente, Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil (2005) propusieron dos modelos que permiten convertir la frecuencia de *default* en una probabilidad neutral al riesgo de *default* y ésta a su vez en un *spread* de crédito. Estas herramientas poseen características tanto de los modelos estructurales como de los modelos de forma reducida (*reduced-form setting*). El primero de ellos es el *Brownian Motion Model* (BM) y el segundo es el *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM).

Resultados de estudios previos

Modelo de Merton

Teixeira (2005) efectuó un estudio empírico con el propósito de evaluar el desempeño de tres modelos estructurales para la fijación de precios de los bonos, entre ellos analizó el desarrollado por Merton (1974), para lo cual tomó una muestra de empresas estadounidenses no financieras con no más de tres tipos de bonos emitidos en dólares. La muestra fue obtenida de las bases de datos de

Datastream y Edgar Online, se analizaron 50 bonos durante el periodo comprendido de 2001 a 2004. En particular se evaluó el error de predicción en precios, rendimientos y *spreads*.

De acuerdo con el análisis realizado, Teixeira encontró que el modelo de Merton sobre-estima en un 11% el precio de los bonos. Asimismo, encontró que subestima el *spread* de crédito en aproximadamente un 76%

BM y PLBM

De acuerdo con los resultados derivados del estudio empírico realizado por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil se encontró que el PLBM aproxima en mayor medida el *spread* de crédito.

La calidad de los modelos se evaluó comparando los resultados obtenidos con cada uno de los modelos contra el *spread* actual, para lo cual se aplicó la medida de calidad denotada como G , basada en los errores cuadráticos; donde: $0 < G < 1$. Entre más se aproxime G a uno se considera que existe una menor diferencia entre el resultado generado por el modelo y los *spreads* observados en el mercado.

Este estudio empírico fue realizado con la información del mercado de bonos Europeo a 10 años y con el índice Global de bonos de Estados Unidos de Norteamérica a 5 años, en ambos casos se consideró la información correspondiente al periodo comprendido de noviembre de 1995 a diciembre de 2004. En los dos mercados, el PLBM ofreció una aproximación muy cercana al *spread* real ofrecido por estos instrumentos.

Con la información del mercado de bonos a 5 años de Estados Unidos, el valor de G obtenido con el BM fue de -11.58 mientras que la G derivada del PLBM fue de 0.97, en tanto que para los bonos Europeos a 10 años el resultado de G bajo el BM fue de -49.96 y para el PLBM el valor de G fue de 0.94.

Como se puede observar el resultado de los dos estudios es muy similar; sin embargo, ambos mercados son economías desarrolladas y estables, por lo que el siguiente paso sería evaluar si se obtienen los mismos resultados en economías emergentes como es el caso de México.

Derivado de lo cual, el objetivo de este análisis es identificar el modelo que aproxime de la mejor manera el costo de la deuda de los préstamos, considerando el hecho de que en México no se posee un mercado secundario para la deuda corporativa, ni tampoco se tiene acceso a una base de datos sobre tasas de recuperación por tipos de préstamos, como es el caso de Estados Unidos o por calificación crediticia. Para lo cual, se analizarán tres modelos: el de Merton, el *Brownian Motion Model* (BM) y el *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM) y para estimar la tasa de recuperación de los préstamos se realizaran seis regresiones, tomando como referencia los estudios desarrollados por Hamilton, Varma, Ou y Cantor (2005) y por Das y Hanouna (2009).

En consecuencia, el presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se hace una presentación teórica de los modelos utilizados en el análisis empírico y una revisión literaria de los resultados alcanzados en otras investigaciones efectuadas en los mercados de Estados Unidos de Norteamérica y de Europa. La Sección 3 presenta los resultados del análisis empírico resultante de la aplicación de los tres modelos sobre los datos de las empresas mexicanas, así como el desempeño de los modelos con los datos mexicanos y el desarrollo de regresiones para

la realización de futura inferencia. Finalmente en la Sección 4, se presentan las conclusiones de la investigación así como las posibles líneas de investigación futuras.

2. Modelos Teóricos

El objetivo de esta sección es describir teóricamente los modelos utilizados para convertir las probabilidades neutrales de *default* en *spread*:

1. Modelo de Merton y de Vasicek-Kealhofer (VK).
2. *Brownian Motion Model* (BM).
3. *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM).

Asimismo, se explica brevemente como el sistema desarrollado por Moody's calcula las probabilidades esperadas de *default* (conocidas por sus siglas en inglés como EDF *Expected Default Frequencies*),

2.1 Modelo de Merton (Valuación del Capital como una opción) y de Vasicek-Kealhofer (VK) (Cálculo de la EDF)

Modelo de Merton

La valuación por opciones financieras puede ser aplicada sobre los instrumentos corporativos, como son las acciones y la deuda. En este caso, el subyacente es el valor de los activos de la empresa y el proceso de difusión será un Movimiento Browniano Geométrico.

$$dV = (\alpha - q)Vdt + \sigma Vdz \quad (2.1)$$

Donde:

- α , representa el rendimiento esperado sobre la empresa.
- q , es la tasa de pagos efectuados a los accionistas o acreedores (dividendos, cupones e intereses).
- σ , es la desviación estándar del rendimiento de los activos de la empresa.
- dz , es el proceso Wiener.

El caso particular del capital desarrollado por Merton (1974) se explica a continuación.

Un accionista tiene un derecho residual sobre el flujo que genera la empresa. Si la deuda vence en $t=0$, recibirá la diferencia entre el flujo de efectivo libre menos la cantidad que se les deba entregar a los acreedores.

Si $V > B$, los acreedores recibirán B , (donde B es el valor nominal de la deuda) y el accionista obtendrá $E = V - B$, es decir, el importe residual derivado de la diferencia entre el valor de la empresa menos el valor de la deuda. En cambio si $V < B$, el flujo del acreedor será igual a $V = B$, y el accionista no recibirá nada, $E = 0$.

Como se puede ver, el valor de la empresa en el tiempo T (V_T) es igual a la suma de la deuda en el tiempo T (B) más el capital en el tiempo T (E_T).

Considerando lo anterior, el capital puede asemejarse a una opción *Call* sobre el valor de los activos de una empresa en el tiempo T (V) con precio de ejercicio igual a B .

$$E_T = \max(V_T - B, 0) \quad (2.2)$$

Utilizando la fórmula de Black & Scholes para la valuación de opciones europeas y tomando como la volatilidad del subyacente (σ), la varianza de los rendimientos de una empresa (σ_V), el valor del capital en t_0 sería el siguiente (considerando que es una opción europea con vencimiento en T):

$$E_0(V, T; B) = V_0 \Phi(d_1) - B e^{-rT} \Phi(d_2) \quad (2.3)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad (2.4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T} \quad (2.5)$$

Donde:

- V_0 , es el valor total de mercado de los activos de la compañía en t_0 .
- V_T , es el valor total de mercado de los activos de la compañía en el tiempo T .
- E_T , es el valor de mercado del capital accionario en el tiempo T .
- E_0 , es el valor de mercado capital accionario en el tiempo t_0 .
- B , es el valor de los intereses y del capital que deberá ser pagado en el tiempo T .
- r , es la tasa libre de riesgo.
- σ_V , es la volatilidad de los activos de la compañía (se asume homoscedástica).
- σ_E , es la volatilidad del capital accionario.
- $\Phi(*)$, es la función de distribución normal estándar.

De acuerdo con este modelo, el valor de la deuda hoy es igual a la diferencia entre V_0 y E_0 y la probabilidad de incumplimiento neutral al riesgo de una entidad se obtendría como la $\Phi(-d_2)$.

Sin embargo, para calcular esta probabilidad se necesita conocer el valor de mercado de todos los activos de la compañía así como la volatilidad de los mismos; desafortunadamente estos valores no son observados directamente en ninguno de los reportes que emiten las empresas y tampoco se pueden desprender de alguno de los indicadores de mercado.

Pero si la empresa que se está analizando cotiza en algún mercado, se puede obtener tanto el valor de mercado del capital accionario, multiplicando el número de acciones en circulación por el precio de mercado de éstas, así como la volatilidad del rendimiento del precio de las acciones. En el presente estudio se utilizó para estimar la volatilidad del precio de la acción el modelo Autorregresivo Generalizado de Heteroscedasticidad Condicional, conocido por sus siglas en inglés como GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*).

Con estas variables y considerando el resultado del cálculo estocástico (Lema de Itô) se tendría la siguiente ecuación:

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_E E_0 = \Phi(d_1) \sigma_V V_0 \quad (2.7)$$

Con este resultado y el de la ecuación (2.3) se tendría un sistema completo de ecuaciones, por medio del cual se podrían obtener los valores de V_0 y σ_V .

Una vez calculadas estas variables, el *spread* de crédito o lo que es lo mismo, la diferencia entre el rendimiento a vencimiento de un instrumento riesgoso y una tasa libre de riesgo bajo las mismas condiciones, se obtendría de acuerdo con el procedimiento descrito por Teixeira (2005):

$$\text{Spread de crédito} = -\frac{1}{T} \ln[\Phi(d_2)] + \frac{V_0}{B e^{-rT}} \Phi(-d_1) \quad (2.8)$$

Como se puede observar de las fórmulas anteriores, bajo este modelo el *spread* de crédito únicamente depende de la razón de la deuda al valor de mercado de la empresa, de la madurez del instrumento de deuda y de la volatilidad de los activos.

Modelo de Vasicek-Kealhofer (VK), Cálculo de la probabilidad esperada de *default* (EDF)

Como se comentó en la Sección 1, el EDF constituye un factor clave para el cálculo del *spread* de crédito. Para la obtención de esta probabilidad, Moody's utiliza el modelo de Vasicek-Kealhofer (VK).

El VK aprovecha la naturaleza residual del capital accionario y lo compara a una opción financiera, bajo esta premisa se puede determinar la volatilidad implícita de los activos de una empresa.

Siguiendo un esquema bastante similar al desarrollado por Merton aunque un poco más sofisticado, Moody's toma la volatilidad implícita en las ecuaciones (2.3)-(2.5) como punto de partida y de manera iterativa predice la volatilidad de los activos de la compañía incorporando otras variables como es el país donde se sitúa la empresa, la industria y el tamaño de la compañía.

Una vez calculada la volatilidad del valor de los activos, se puede determinar la probabilidad de *default* de la siguiente manera:

$$p_t = \Pr \left[-\frac{\ln \frac{V_t}{B_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) t}{\sigma_E \sqrt{t}} \geq \varepsilon \right] \quad (2.9)$$

Donde:

- p_t , es la probabilidad de *default* en el tiempo t .
- V_t , es el valor de mercado de los activos de la empresa en el tiempo t .
- B_t , es el valor en libros de la deuda de la empresa al tiempo t .
- μ , es el rendimiento esperado sobre los activos de la empresa.

- ε , es el componente aleatorio de los rendimientos esperados.

El modelo de Black & Scholes asume que los rendimientos esperados sobre los activos de una empresa así como su componente aleatorio (ε) se distribuyen como una Normal, teniendo éstos últimos una media igual a cero y una varianza igual a 1; $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Derivado de lo anterior, la probabilidad de *default* se podría definir en términos de una distribución normal acumulada (Φ), como se muestra a continuación:

$$p_t = \Phi [-DD] \quad (2.10)$$

Donde:

- DD, es la distancia al *default*.

Esta distancia al *default* (DD) es simplemente el número de desviaciones estándar que hay entre el valor de los activos y el punto de *default* y se calcularía bajo este modelo con la siguiente fórmula:

$$DD = \frac{\ln \frac{V_t}{B_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) t}{\sigma_V \sqrt{t}} \quad (2.11)$$

2.2 Valuación de opciones y probabilidades neutrales al riesgo

Para la valuación de las opciones resulta necesario suponer que no existen oportunidades de arbitraje, “No existen oportunidades de arbitraje si y sólo si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo” (Pliska, 1998).

Para soportar lo anterior, también es importante suponer que los individuos son neutrales al riesgo¹, por lo que no es necesario que una inversión ofrezca una prima adicional por el riesgo tomado, en consecuencia, la tasa mínima de retorno que se espera sobre una inversión es la tasa libre de riesgo y el valor futuro de las opciones deberá ser descontado a esta tasa.

Pero tanto el mercado como los compradores deben evitar que sea un medio para obtener ganancias extraordinarias, para lo cual se deben eliminar todas las posibles oportunidades de arbitraje.

Por dicha razón, el valor de este instrumento debe ser el “*justo*”, es decir, el que sea percibido por todo el mercado. Para conocer ese valor deben aislarse todos los posibles factores de subjetividad, como es el caso de la tasa de descuento utilizada de acuerdo con el grado de aversión al riesgo de cada inversionista; el modelo que toma en cuenta este problema es el de la valuación por “*martingala*”, el cual descuenta los valores esperados a la tasa libre de riesgo y bajo unas probabilidades sintéticas denominadas “probabilidad neutral al riesgo”.

¹ Un individuo es neutral al riesgo, cuando no espera recibir una prima adicional sobre su inversión en un activo riesgoso.

Probabilidades neutras al riesgo de *default*

Bajo un argumento similar al utilizado en la valuación de las opciones financieras, Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil (2005) calcularon la probabilidad neutral al riesgo de *default* suponiendo que el valor de un bono cupón cero libre de riesgo crédito con valor nominal igual a \bar{F} , descontado con una tasa de mercado libre de riesgo crédito ($\bar{Y}_{j,i}$) y con fecha de vencimiento en T_j es igual al valor esperado bajo la probabilidad neutral al riesgo de *default* de un bono cupón cero riesgoso cuyo valor nominal es igual a F , con fecha de vencimiento en T_j y el cual fue descontado con una tasa de mercado que incluye el riesgo de incumplimiento ($Y_{j,i}$).

$$E_Q[F] = q_{j,i}R\bar{F} + (1 - q_{j,i})\bar{F} \quad (2.12)$$

$$\frac{\bar{F}}{(1 + Y_{j,i})^{T_j}} = \frac{E_Q[F]}{(1 + \bar{Y}_{j,i})^{T_j}} \quad (2.13)$$

$$(1 + Y_{j,i})^{-T_j} = [R + (1 - R)(1 - q)](1 + \bar{Y}_{j,i})^{-T_j} \quad (2.14)$$

Donde:

- R , es la tasa de recuperación (el porcentaje del principal que es recuperado en caso de que la empresa no pueda pagar).
- $q_{j,i}$, denota la probabilidad neutral de *default* al tiempo t_i con madurez en T_j .

De las ecuaciones anteriores se puede derivar la probabilidad neutral de *default*:

$$q_{j,i} = \frac{1}{1 - R} \left[1 - \left(\frac{1 + Y_{j,i}}{1 + \bar{Y}_{j,i}} \right)^{-T_j} \right] \quad (2.15)$$

Cabe destacar que $q_{j,i}$ representa la probabilidad de *default* neutral al riesgo correspondiente al lapso de tiempo faltante para el vencimiento del instrumento de deuda, que en algunos casos puede ser mayor o menor a un año. Por lo cual, para efectos de análisis, los autores del documento en mención sugieren anualizar esta probabilidad de la siguiente manera:

$$\tilde{q}_{j,i} = 1 - (1 - q_{j,i})^{\frac{1}{T_j}} \quad (2.16)$$

La verdadera tasa neutral al riesgo de *default* puede ser derivada si se conoce la tasa de recuperación (R). Se asume un valor genérico de 40% para todos los instrumentos, con base en estudios empíricos realizados por Frye (2000), Schuermann (2004), Altman y Kishore (1996), Acharya et al. (2004) y Hamilton et al. (2001). Sin embargo, “el imponer una tasa de recuperación fija no se encuentra acorde con la realidad, dado que existe evidencia de que esta tasa de recuperación posee grandes variaciones con respecto a la media de los tipos de préstamos” (Hu (2004).

Por su parte, Hull (2007) define a la tasa de recuperación de un bono “como el valor de mercado del mismo inmediatamente después del *default* como un porcentaje del valor nominal”.

Asimismo, afirma que las tasas de recuperación se encuentran negativamente correlacionadas con las tasa de *default*. De hecho Hamilton, Varma, Ou y Cantor (2005) efectuaron un análisis con datos de los bonos de Estados Unidos por el periodo comprendido entre 1983 y 2004, llegando a la siguiente relación lineal:

$$\text{Tasa promedio de recuperación} = 0.52 - 6.9 \times \text{Tasa promedio de } \textit{default} \quad (2.17)$$

Sin embargo este análisis se realizó con información de Estados Unidos por lo cual no resulta del todo adecuado para el mercado mexicano como se verá más adelante.

Finalmente con la probabilidad neutral de *default* se puede obtener el *spread* de crédito como se muestra a continuación:

$$s_{j,i} = Y_{j,i} - \bar{Y}_{j,i} \geq 0$$

$$s_{j,i} = \frac{1 + \bar{Y}_{j,i}}{\left[R + (1 - R)(1 - q_{j,i}) \right]^{\frac{1}{T_j}}} - 1 - \bar{Y}_{j,i} \quad (2.18)$$

Donde:

- $s_{j,i}$, representa el *spread* de crédito base adicionado a la tasa libre de riesgo crédito.

Cálculo de la tasa de recuperación (R)

Lo más adecuado para el cálculo del *spread* de crédito sería obtener la tasa de recuperación real para las entidades mexicanas, acorde con el tipo de préstamo (*senior* o *junior*) o bien con la calificación crediticia. Sin embargo al carecer de esa información, se calculó esta tasa de recuperación mediante las probabilidades de *default* condicionales.

De conformidad con Hull (2007), estas probabilidades condicionales representan la posibilidad de que una entidad incumpla entre el tiempo t y $t + \Delta t$ dado que pagó anteriormente. A esta probabilidad se le conoce como la intensidad de *default* (*default intensity*) o *harzard rate* en el tiempo t . Donde $\bar{\lambda}$ representa la intensidad de *default* promedio entre en tiempo 0 y el tiempo t .

Asimismo, si se denota a la probabilidad de *default* en el tiempo t como $Q(t)$, se obtendría que:

$$Q(t) = 1 - e^{-\bar{\lambda}t} \quad (2.19)$$

Bajo lo cual, se podría despejar a la intensidad de *default* promedio como se muestra a continuación:

$$\bar{\lambda} = -\frac{\ln(1-Q(t))}{t} \quad (2.20)$$

Si además, se expresa a la EDF como $P(t)$ y bajo el supuesto de que $P(t) = Q(t)$, entonces la ecuación anterior podría definirse de la siguiente manera:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_p - \frac{\ln(1-P(t))}{t} = -\frac{\ln(1-EDF)}{t} \quad (2.21)$$

Hull (2008) propone otra forma de calcular la probabilidad de *default* condicional por año, dado que la entidad no incumplió previamente. Esta aproximación parte de la premisa de que la única razón por la cual un bono corporativo se puede vender a precio inferior que un bono libre de riesgo con las mismas características, es por la posibilidad de incumplimiento en el pago del primero.

Dado lo anterior, esta probabilidad de incumplimiento se calcularía de la siguiente manera:

$$\bar{\lambda} = \frac{s}{1-R} \quad (2.22)$$

Donde s es el *spread* del rendimiento del bono corporativo sobre el instrumento libre de riesgo y R es la tasa de recuperación esperada.

Tomando el resultado (2.22), se puede estimar a la R de la siguiente manera:

$$R = 1 - \frac{s}{\bar{\lambda}} \quad (2.23)$$

Ahora bien, si se considera la EDF a un año así como las definiciones de $\bar{\lambda}$ dadas por las ecuaciones (2.20)-(2.22), se pueden llegar a las siguientes aproximaciones de R :

$$R = 1 - \frac{s}{\bar{\lambda}_p(1 + \bar{Y}_{j,i} + s)} \quad (2.24)$$

$$R = 1 - \frac{s}{\bar{\lambda}_p(1 + \bar{Y}_{j,i})} \quad (2.25)$$

Como se comentó previamente, la probabilidad de *default* y el consecuente *spread* de crédito no pueden ser determinados fácilmente por las empresas que no cotizan en las bolsas de valores, por lo cual Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil sugieren dos modelos para el cálculo de los mismos: el *Brownian Motion Model* (BM) y el *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM), los cuales serán explicados brevemente a continuación. Estos modelos, como lo mencionan dichos autores incorporan características de los estructurales y de los de forma reducida.

Tomando en consideración el hecho de que en México no se cuenta con una base de datos sobre las tasas de recuperación por tipo de préstamos, como la que fue desarrollada por Moody's para el mercado de bonos de Estados Unidos, resultará necesario para las empresas que apliquen el BM y el PLBM estimar una R , debido a lo cual, para hacer inferencia para años posteriores se llevaron a cabo seis regresiones, para lo cual se tomó como referencia los estudios llevados a cabo por Hamilton, Varma, Ou y Cantor (2005) y por Das y Hanouna (2009). El detalle de las variables consideradas en dicho análisis así como los resultados del mismo, se presentan en la Sección 3.3.

2.3 Brownian Motion Model (BM)

Este modelo toma como base la valuación de los instrumentos de deuda con la teoría de opciones financieras propuesta por Black & Scholes y Merton, así como los modelos de migración de las calificaciones de crédito y de las probabilidades de transición de crédito (cadenas de Markov).

Estos autores modelaron la calificación de crédito así como la distancia al *default* (X) como un Movimiento Browniano general, con un nivel de *default* inicial igual a x_0 , donde $x_0 > 0$, es decir:

$$X_t = x_0 + \sigma_X W_t \quad (2.26)$$

Donde:

- σ_X , es la volatilidad del proceso X .
- W_t , es un proceso Wiener.

Adicionalmente, suponen que existe una barrera mínima que corresponde al nivel de *default* d y una vez que la empresa toca ese nivel no se puede recuperar. Para facilitar el cálculo se define a este nivel como cero ($d=0$).

También asumen que el proceso X no tiene un *drift* y que comienza por encima del nivel de *default*.

Asimismo, bajo este modelo se requiere que el proceso X nunca toque el nivel d durante toda la vigencia del instrumento.

De acuerdo con el desarrollo formal realizado por Karatzas y Shreve (1988), Harrison (1985) y Rutkowski (1999), la probabilidad de tocar la barrera de *default* durante en intervalo $[0, T]$, comenzando en t_0 es la siguiente:

$$p(T) = 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{x_0}{\sigma_X \sqrt{T}} \right) \right] \quad (2.27)$$

Invirtiendo la ecuación anterior, se llegaría a que el valor inicial del proceso X sería igual a:

$$x_0 = \sigma_X \sqrt{T} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{p(T)}{2} \right) \quad (2.28)$$

Donde:

- T es la fecha de vencimiento del instrumento de deuda.
- $p(T)$ es la probabilidad o frecuencia de *default* (EDF) al vencimiento T .
- Φ (*) es la distribución normal estándar acumulada.
- Φ^{-1} (*) es la distribución normal estándar acumulada inversa.

Reformulando la ecuación anterior para un tiempo de madurez arbitrario T_j y utilizando la madurez de un instrumento a un año T_1 , los autores llegan a la siguiente fórmula para la probabilidad de *default* en T_j :

$$p(T_j) = 2\Phi \left[\sqrt{\frac{T_1}{T_j}} \Phi^{-1} \left(\frac{p(T_1)}{2} \right) \right] \quad (2.29)$$

Donde:

- $p(T_j)$, es la probabilidad esperada o frecuencia de *default* (EDF) con vencimiento en T_j .

Finalmente se obtendría la probabilidad neutral de *default* $q_{j,i}$ con la siguiente fórmula:

$$q_{j,i} = 2\Phi \left[\sqrt{\frac{T_1}{T_j}} \Phi^{-1} \left(\frac{p_i}{2} \right) \right] \quad (2.30)$$

Donde:

- p_i corresponde a la probabilidad esperada de *default* (EDF) a un año.
- $q_{j,i}$, es la probabilidad neutral de *default* hasta el vencimiento del instrumento en T_j . Esta probabilidad puede ser anualizada con la fórmula (2.16).

De acuerdo con el análisis empírico realizado por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil resultó que este modelo no describe adecuadamente los cambios repentinos en la calificación crediticia. Asimismo, asume que conforme el instrumento se aproxima a su vencimiento va perdiendo calificación, lo cual no se cumple necesariamente en todos los casos.

Considerando estas deficiencias, dichos autores desarrollaron otro modelo que considera la posibilidad de cambios repentinos en la calidad crediticia mediante un modelo Gaussiano de difusión (Muller et al 1990 y Di Matteo et al. 2005) llamado *Power Law Brownian Motion Model*, el cual será explicado en la siguiente sección.

2.4 Power Law Brownian Motion Model (PLBM)

Este modelo toma en cuenta la posibilidad de que el instrumento se degrade de manera repentina así como la asimetría en la calificación crediticia.

El PLBM simplemente incluye parámetros adicionales a la ecuación anterior llegando a lo siguiente:

$$\tilde{q}_{j,i} = 2\Phi \left[c_i \left(\frac{T_1}{T_j} \right)^{\alpha_i} \Phi^{-1} \left(\frac{p(T_1)}{2} \right) \right] \quad (2.31)$$

Cabe aclarar, que con esta fórmula se obtiene directamente la probabilidad neutral anualizada.

Donde:

- α_i y $c_i \in R$ deben ser estimados en cada momento en el tiempo t_i .

- $0 < \alpha_i < 1$, describe el comportamiento empírico de las firmas en el mercado. Captura principalmente todos los movimientos (incluyendo los movimientos explosivos *scaling law*) de las probabilidades neutrales con respecto a la fecha de vencimiento.
- $c_i \in R$, describe el nivel total esperado de las probabilidades *default* para todo el mercado y puede ser interpretado como la prima de mercado por el riesgo de crédito.

Los autores del artículo estimaron ambos parámetros en cada momento en el tiempo t_i corriendo la siguiente regresión lineal tomando todos los vencimientos de los instrumentos:

$$\ln \left[\frac{\Phi^{-1} \left(\frac{\tilde{q}_{j,i}}{2} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{p_i}{2} \right)} \right] = \ln c_i + \alpha_i \ln \left(\frac{T_1}{T_j} \right) + \varepsilon_j \quad (2.32)$$

Donde:

- $\ln \left(\frac{T_1}{T_j} \right)$ es utilizado como la variable independiente.
- $\ln \left[\frac{\Phi^{-1} \left(\frac{q_j}{2} \right)}{\Phi^{-1} \left(\frac{p_i}{2} \right)} \right]$, es la variable dependiente. Ésta se calcula dividiendo la verdadera probabilidad neutral al riesgo de *default* anual (ver ecuaciones 2.15 y 2.16) entre el EDF a un año.
- ε_j , es una variable aleatoria independiente con $E(\varepsilon_j) = 0$ y $Var(\varepsilon_j) = \sigma_{\varepsilon_j}^2$

Estadístico de prueba

Con el propósito de evaluar el ajuste de estos modelos y para poder realizar posteriormente inferencia, con aquél que ofrezca los mejores resultados, Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil definen un estadístico denotado como G, cuyo cálculo será explicado a continuación.

Sea $n \in N$, $\mathbf{Z} = (Z_1 \dots \dots Z_n)$ un vector aleatorio, con realizaciones $\mathbf{z} = (z_1 \dots \dots z_n) \in R^n$, se denota al estimador de \mathbf{z} como $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1 \dots \dots \hat{z}_n) \in R^n$ y al estadístico que evalúa la bondad de ajuste como:

$$G := 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (2.33) \quad -\infty < G \leq 1$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (2.34)$$

Este estadístico de ajuste se aproxima a uno cuando el verdadero *spread* de crédito y los calculados bajo cada modelo son muy similares. Desviaciones muy grandes resultan en valores de G muy pequeños e incluso negativos.

Estimación de los parámetros α_i y c_i para inferencia

Si el modelo PLBM ofrece la mejor aproximación de acuerdo con los datos del mercado mexicano, resulta indispensable pronosticar los valores de α_i y c_i para la realización de inferencia.

Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil efectuaron un análisis de la serie de tiempo resultante de la regresión y encontraron que el modelo que mejor describe el comportamiento de ambos parámetros es un modelo Autorregresivo.

Quedando la probabilidad neutral al riesgo anualizada con los parámetros estimados de α_u y c_u para la realización de inferencia en el tiempo u de la siguiente manera:

$$\tilde{q}_{j,u} = 2\Phi \left[c_u \left(\frac{T_1}{T_j} \right)^{\alpha_u} \Phi^{-1} \left(\frac{p(T_1)}{2} \right) \right] \quad (2.35)$$

3. Aplicación empírica de los modelo de Merton, BM y PLBM sobre el mercado mexicano

3.1 Recopilación de los datos

Para la realización del presente estudio, como primer paso se analizaron los estados financieros y las notas financieras a los mismos contenidos en las bases de datos privadas de Infotel y Datastream así como en los Reportes Anuales emitidos por las empresas mexicanas que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) durante los ejercicios de 1998 a 2007. Se evaluó la información de 163 empresas que cotizaron en promedio en cada uno de los ejercicios bajo análisis. El requisito para incorporarlas a la muestra fue que tuvieran deudas referenciadas a tasas base libres de riesgo crédito y sobre ellas se adicionara un *spread* de crédito.

Resultante de este filtro quedó un total de 53 empresas con 1,146 instrumentos de deuda durante 10 años. La mayor parte de los instrumentos analizados fueron préstamos bancarios, certificados bursátiles, préstamos quirografarios, créditos refaccionarios, préstamos hipotecarios, préstamos garantizados, líneas de crédito, arrendamientos, pagarés de mediano y largo plazo y préstamos sindicados. Otro factor importante que se consideró para la selección de los préstamos es que éstos se hubieran realizado con terceros, con el objeto de que se fijaran *spreads* de crédito que cumplieran con el principio de valor de mercado.

El análisis de la información se realizó por ejercicio, no se efectuaron agrupaciones por sector debido a que en algunos casos como fue el de servicios únicamente se contó con una empresa: Médica Sur y en otros casos como el de transformación habían 18 firmas. En la Tabla 3.1 se muestra el número de empresas analizadas, agrupadas por sector de acuerdo con las categorías utilizadas por la BMV.

Tabla 3.1 Número de empresas analizadas por sector durante 1998 a 2007

Sector	Número de empresas
Comercio	10
Comunicaciones y transportes	7
Construcción	11
Extractiva	2
Servicios	1
Varios	4
Transformación	18
Total	53

Cuatro de estas entidades seleccionadas tuvieron la particularidad de no haber cotizado durante estos 10 ejercicios, estas empresas fueron agregadas a la muestra con el objeto de evitar sesgos en el análisis, considerando únicamente aquéllas que sobrevivieron durante todo el periodo de estudio.

Estas firmas son: Apasco (sector de la construcción, periodo de análisis: 1998-2002); Nadro (sector comercios, periodo de análisis: 2000-2003); Maizoro (sector de la transformación, periodo de análisis: 1998-2002) y Regio (sector de la transformación, periodo de análisis: 1998-2002).

Asimismo, cabe destacar que no todas estas empresas aparecen de forma consecutiva durante todo el periodo de análisis, a pesar de que seguían cotizando en la BMV, lo cual tiene su origen en que en algunos años no tuvieron deudas referenciadas a una tasa base.

El número de préstamos estudiados por año van de 158 a 68, como se presenta a continuación.

1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
68	97	120	86	145	158	108	99	133	132

Una vez recopilada esta información, el siguiente paso fue formar una base de datos por año con el nombre de la empresa, el sector al que pertenece, el tipo de préstamo, la tasa de referencia, el *spread* de crédito, el monto del préstamo y la vigencia del mismo.

Posteriormente, se calculó con el sistema desarrollado por Moody's la probabilidad esperada de *default* (EDF a un año) para cada empresa para los años de 1998 a 2007.

Algunos de los datos que solicita el sistema son el saldo: del efectivo y bancos; del inventario total; de los inmuebles maquinaria y equipo; del activo intangible; del activo total; del pasivo total, de las ventas; de los costos y gastos de operación y del gasto por intereses.

Este sistema arroja como resultado: las probabilidades esperadas de *default* para 1, 2, 3, 4 y 5 años; las calificaciones crediticias de 1 y 5 años y las probabilidades condicionales de *default* (denominadas en el sistema como probabilidades *forward*) para 1, 2, 3, 4 y 5 años. Cabe aclarar, que lo que se calificó fue a la entidad pero si una empresa tenía varios préstamos, a éstos se les otorgó la misma calificación y las mismas probabilidades de *default* obtenidas para la firma en global.

De acuerdo con la información obtenida, se pudo observar que ninguna empresa de la muestra obtuvo la calificación más alta, es decir A; la mayor parte de las entidades fueron calificadas entre B1 y Ba3.

Asimismo, se pudo ver que existe una tendencia positiva en las calificaciones conforme pasan los años, ya que en 1998 la mayor proporción de préstamos se encontraba en el *rating* B1, sin embargo para el año de 2007 la mayor proporción se encuentra en el rango de Ba2 y de Ba3.

A continuación se resume el número de préstamos que conformaron cada categoría de calificación por año:

Tabla 3.2 Número de préstamos agrupados por calificación durante el periodo de 1998 a 2007

Préstamos por calificación:	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Baa1							5			
Baa2		4				2	4	5	5	15
Baa3	3	6	1		1	5	1	14	19	4
Ba1		17	33		3	15	20	8	18	18
Ba2	4	7	16	27	45	23	23	14	19	25
Ba3	4	11	8	14	19	84	22	22	32	26
B1	20		17	2	30	16	9	21	16	25
B2	11	8	22	7	16	8	4	2	6	4
B3	20	34	10	5	6	1	10		12	
Caa-C	6	10	13	31	25	4	10	13	6	15
Total	68	97	120	86	145	158	108	99	133	132

Una vez categorizados los préstamos, se calculó la mediana del costo total de la deuda para cada uno de los años, la mediana de las EDF a un año y la mediana de los *spreads* de crédito.

En la Tabla 3.3 se presenta las medianas de los costos totales de las deudas por calificación.

Tabla 3.3 Medianas de los costos totales de las deudas por calificación

Calificación	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Baa1							8.82%			
Baa2		18.28%				3.26%	7.81%	10.26%	7.58%	7.66%
Baa3	8.97%	9.25%	19.70%		15.39%	1.50%	5.07%	10.30%	7.66%	8.75%
Ba1		7.16%	9.64%		15.70%	1.50%	10.78%	10.80%	8.23%	7.96%
Ba2	8.14%	28.60%	16.89%	9.00%	9.62%	2.00%	9.65%	11.97%	8.48%	8.53%
Ba3	18.19%	9.70%	18.33%	11.33%	10.17%	3.17%	9.60%	10.05%	8.71%	9.20%
B1	13.21%		8.61%	7.63%	7.15%	2.98%	8.45%	8.29%	0.00%	8.44%
B2	35.75%	6.86%	9.00%	10.52%	12.17%	5.50%	7.57%	11.34%	8.05%	11.68%
B3	10.84%	9.45%	9.07%	14.51%	15.50%	4.25%	5.51%		12.51%	
Caa-C	9.45%	8.07%	10.11%	13.75%	8.38%	1.88%	10.31%	12.75%	9.65%	11.80%
Promedio del costo de la deuda	10.46%	9.74%	10.13%	6.67%	9.41%	2.60%	8.35%	8.58%	7.09%	7.40%

Como se puede observar, no existe una relación directamente proporcional entre la calificación crediticia y el costo total del préstamo, ya que se esperaría que una calificación más alta signifique menos riesgo y por consecuencia un costo de oportunidad menor. Por ejemplo, en el año de 1998 la tasa de interés más alta se encuentra en el préstamo calificado como B2, mientras que los préstamos calificados como Caa son los que poseen algunos de los costos más bajos. Al igual que en la tabla anterior, se puede observar una mejora a lo largo del tiempo, ya que para el año de 2007 la tasa de interés más alta se encuentra en los préstamos catalogados como más riesgosos, sin embargo sigue sin existir una correlación perfecta entre calificación crediticia y costo de la deuda.

Como segundo análisis se evaluó la relación entre la calificación crediticia y el *spread* de crédito adicionado a la tasa base (Tabla 3.4).

Tabla 3.4 Medianas de los *spreads* adicionados por calificación

Calificación	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Baa1							2.00%			
Baa2		4.64%				3.26%	0.83%	0.65%	0.07%	0.40%
Baa3	1.63%	3.80%	4.46%		2.50%	1.50%	0.50%	1.33%	0.40%	1.19%
Ba1		1.71%	3.41%		7.53%	1.50%	4.01%	2.99%	1.20%	0.44%
Ba2	0.81%	4.50%	4.00%	1.25%	1.13%	2.00%	2.84%	2.37%	1.00%	1.25%
Ba3	1.08%	3.13%	5.44%	3.19%	2.25%	3.17%	2.60%	2.33%	1.31%	2.00%
B1	3.63%		1.94%	2.66%	1.28%	2.98%	1.93%	3.00%	2.88%	1.25%
B2	8.86%	1.41%	2.89%	2.02%	4.00%	5.50%	3.25%	1.93%	2.75%	4.88%
B3	3.40%	3.47%	2.96%	1.63%	7.33%	4.25%	0.58%		5.00%	
Caa-C	2.12%	2.63%	3.30%	3.00%	3.25%	1.88%	4.90%	3.56%	3.75%	4.38%
Promedio anual	2.15%	2.53%	2.84%	1.37%	2.93%	2.60%	2.34%	1.81%	1.84%	1.58%

Al igual que en el análisis de los costos de la deuda totales, se puede desprender la falta de una relación directamente proporcional entre la calificación crediticia y el *spread* de crédito adicionado a la tasa libre de riesgo, asimismo se puede ver que para el año de 1998, los *spreads* más altos se encuentran en la categoría B2, mientras que la calificación Caa (más riesgosa) tiene un *spread* relativamente bajo. Esta situación, presenta una ligera mejoría para el ejercicio de 2007, ya que el segundo *spread* más alto se encuentra en la categoría Caa, sin embargo los puntos más altos se encuentran en el *rating* B2, siendo éste de las calificaciones con menos riesgo.

Esta falta de concordancia entre el riesgo de no pago y los costos de las deudas puede tener su origen en tres factores: i) la falta de ahorro y la escasez de fondos prestables en los mercados financieros internos mexicanos, los cuales favorecieron y han favorecido el establecimiento de vínculos muy estrechos entre bancos y empresas industriales, de esta forma los grandes empresarios garantizan su financiamiento a tasas preferenciales sin que el acreedor tome en cuenta el riesgo de *default* de la entidad; ii) la escasez de un mercado secundario para la deuda corporativa, lo que implica que el costo de la misma no se fije de conformidad con las leyes de oferta y demanda y iii) la carencia de una base de datos mexicana que contenga la información de las tasas de recuperación por tipo de préstamo y por calificación crediticia, lo que conlleva a que no se considere a esta variable al momento de establecer el costo de la deuda y que por lo tanto ésta deba ser considerada en los modelos como estocástica .

En la Tabla 3.5 se presentan las medianas de las probabilidades esperadas de *default* para un año de acuerdo con la calificación crediticia (ambos datos fueron arrojados por el sistema), así como los promedios por calificación y por año.

Tabla 3.5 Medianas de las probabilidades de *default* para un año por calificación

Calificación	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	Promedio por calificación
Baa1							0.27%				0.03%
Baa2		1.90%				0.38%	0.34%	0.32%	0.37%	0.38%	0.37%
Baa3	0.38%	0.57%	0.53%		0.54%	0.59%	0.49%	0.47%	0.38%	0.49%	0.44%
Ba1		1.05%	1.00%		1.02%	0.90%	1.05%	0.95%	0.81%	1.02%	0.78%
Ba2	1.35%	1.62%	4.62%	1.19%	1.35%	1.24%	1.20%	1.44%	1.46%	1.21%	1.67%
Ba3	2.31%	1.73%	1.80%	2.31%	2.15%	1.87%	1.80%	2.02%	1.99%	1.77%	1.97%
B1	2.23%		3.11%	3.48%	2.95%	2.80%	2.54%	3.19%	3.55%	3.34%	2.72%
B2	2.70%	4.77%	4.69%	5.40%	4.04%	5.02%	4.56%	4.20%	3.82%	4.28%	4.35%
B3	6.38%	6.71%	6.12%	7.07%	7.02%	7.70%	6.40%		6.25%		5.36%
Caa-C	6.71%	16.89%	29.63%	23.45%	19.18%	35.00%	35.00%	9.55%	21.16%	35.00%	23.16%
Promedio anual	2.21%	3.52%	5.15%	4.29%	3.83%	5.55%	5.37%	2.21%	3.98%	4.75%	4.08%

Con estos resultados, se puede observar una clara tendencia entre las probabilidades de *default* y las categorías, como era de esperarse. Es por ello, que los instrumentos con calificación Baa1 son los que poseen la menor probabilidad de incumplimiento en un año, mientras que los que se encuentran catalogados como más riesgosos tienen una probabilidad de incumplimiento de hasta el 35% en un año.

Dentro de una misma categoría no existe una oscilación muy grande en las EDF de un ejercicio a otro, sin embargo como se puede ver en la Tabla 3.5 sí hay cambios entre calificaciones, lo cual tiene su origen en que este sistema considera además de la información financiera de las entidades, la situación económica del país, la situación de las industrias, entre otros muchos factores.

Una vez que se obtuvieron los datos, se calibraron cada uno de los modelos. Se comenzó con el desarrollado por Merton y se finalizó con el PLBM:

3.2 Resultados del Modelo de Merton

Para la realización de este modelo se realizaron los pasos que se describen a continuación.

En primer lugar, se calculó para cada una de las empresas de la muestra y para cada uno de los ejercicios de los cuales se poseía información sobre sus préstamos, la volatilidad del precio de su acción con el modelo de GARCH, tomando la serie de precios diaria segmentada por año (1998-2007), con lo cual se obtuvo una volatilidad diaria por ejercicio. Esta volatilidad se anualizó, ya que la información financiera de las entidades se encuentra en términos anuales (Reportes Anuales).

Se consideró para el cálculo de la varianza al modelo de GARCH (1,1)², propuesto por Bollerslev en 1986. Éste calcula σ_n^2 a partir del promedio de la varianza de largo plazo V , así como de σ_{n-1}^2 y de u_{n-1} .

La ecuación que le representa es la siguiente:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (3.1)$$

Donde γ es la ponderación que se le da a V (varianza de largo plazo); α es la ponderación a u_{n-1}^2 (rendimiento al cuadrado desfasado un periodo); β es la ponderación a σ_{n-1}^2 (varianza calculada con el modelo de GARCH(1,1) desfasada un periodo).

Estableciendo ω como γV , este modelo puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (3.2)$$

Posteriormente, se aplicó el modelo de Merton (1974) explicado en la Sección 2, en particular las fórmulas (2.3), (2.4), (2.5) y (2.7).

Con estas fórmulas se planteó un sistema de ecuaciones, con el objeto de resolver los valores del total de los activos de la compañía en t_0 así como la volatilidad de los mismos.

En términos generales, el modelo de Merton supone que la entidad posee una sola deuda que no paga intereses y/o amortizaciones al capital durante la vigencia de la misma y por lo tanto todo se liquida al vencimiento.

Sin embargo, en este análisis la mayoría de las entidades poseían más de 5 instrumentos con diferentes tasas, diferentes montos y por supuesto diferentes vencimientos.

Asimismo, de acuerdo con las notas a los estados financieros de cada una de las empresas, contenidas en los Reportes Anuales correspondientes los años anteriormente mencionados, todos los préstamos efectúan pagos de intereses y capital durante su vigencia.

Considerando lo anterior, para el cálculo del importe de la deuda así como del vencimiento se realizó el procedimiento llevado a cabo por Teixeira (2005). Este autor considera a la duración como una aproximación de la madurez de los bonos cupón cero del modelo de Merton. Lo cual según este autor, parece razonable ya que la duración aplicable en el cálculo es el resultado de ponderar la duración de cada instrumento por la proporción que representa el valor descontado de cada deuda con respecto a la suma del valor presente de todas las deudas.

Asimismo, Teixeira considera como valor nominal del portafolio de la deuda a la suma de las deudas descontadas al mismo periodo (t_0).

² Para mayor información sobre el modelo de GARCH consultar Hull (2009).

Adicionalmente, este autor resalta el hecho de que como no se examina la totalidad de los pasivos de las firmas, no se puede resolver el sistema de ecuaciones planteado por Merton con el valor total de mercado del capital accionario (total del número de acciones en circulación por el precio de la acción), por lo cual se calculó la proporción que representaba el monto de los instrumentos analizados para cada año con respecto al valor total de sus pasivos del ejercicio correspondiente y esta proporción fue aplicada al importe del valor de mercado del capital accionario total.

Estos cálculos se llevaron a cabo para cada una de las empresas y por cada uno de los años analizados.

Como lo sugiere Hull (2007), al tratarse de un sistema de ecuaciones no lineal de la forma $F(x,y)=0$ y $G(x,y)=0$, se utilizó la rutina del Solver en Excel para encontrar los valores de V_0 y σ_0 de manera que se minimizara la función $[F(x,y)]^2 + [G(x,y)]^2$.

Una vez que el programa resuelve de manera iterativa las ecuaciones, se puede determinar el valor de $\Phi(-d_2)$, o lo que Merton define como la probabilidad neutral de *default*.

Finalmente, con la ecuación (2.8) se calculó el *spread* por empresa, a diferencia de los modelos posteriores donde se determinó el *spread* para cada uno de los instrumentos.

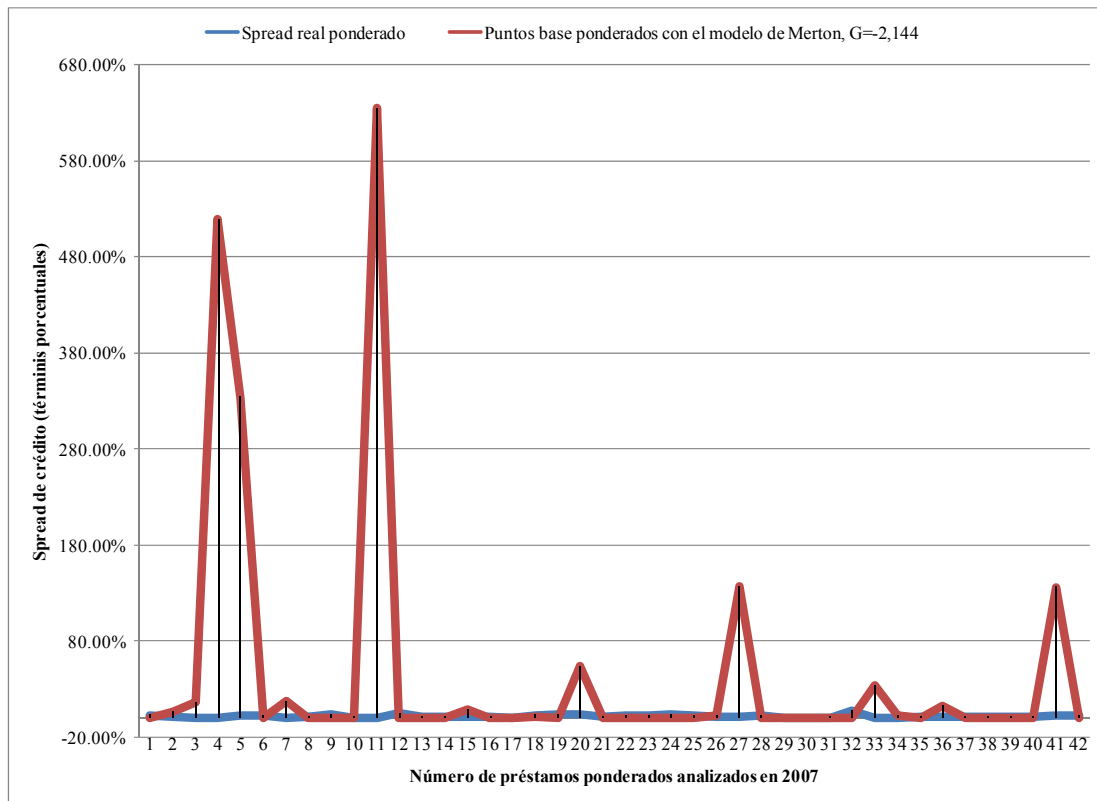
Al igual que para los modelos BM y PLBM se calculó el estadístico de prueba G, pero para efectos comparativos el *spread* de crédito real de cada uno de los préstamos se ponderó por la proporción resultante de dividir el monto cada instrumento bajo análisis con respecto al valor total de la deuda de cada entidad, con lo cual se obtuvo un *spread* real ponderado por empresa. Esta mecánica se calculó para cada uno los ejercicios bajo análisis. Los resultados se presentan a continuación:

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Valor del estadístico G	-2,738	-16,729	-4,29	-623	-64	-1,263	-667	-67	-5,054	-2,143

Como se puede observar en la tabla anterior, el *spread* calculado con este modelo se encuentra muy alejado del verdadero *spread* de crédito, trayendo como resultado que el valor del estadístico de prueba (G) no se aproxime en ninguno de los años al valor ideal de 1.

Esta situación, también se puede observar de forma gráfica al analizar particularmente el ejercicio de 2007 (Gráfica 3.1).

Gráfica 3.1 Comparación del *spread real* y el estimado con el modelo de Merton correspondiente al ejercicio de 2007



Este resultado es consistente con el obtenido por Teixeira (2005) en su análisis en el mercado de bonos en Estados Unidos.

Otro inconveniente de este modelo, es que únicamente puede ser aplicado sobre entidades públicas, ya que las variables requeridas por el modelo son de mercado, lo cual para el caso mexicano resulta muy grave, considerando que la mayor parte de las organizaciones son entidades privadas.

En la siguiente sección se analizará el ajuste ofrecido por los modelos BM y PLBM.

3.3 Resultados de los modelos *Brownian Motion* (BM) y *Power Law Brownian Motion* (PLBM)

Como se comentó en la Sección 3.1, antes de poder aplicar estos modelos es necesario determinar la EDF a 1 año de cada uno de los préstamos. Una vez, calculadas éstas se determinaron las probabilidades neutrales de incumplimiento para cada uno de los modelos, considerando todos los instrumentos contenidos en cada uno de los ejercicios. No se efectuó una división por calificación o por sector como lo hicieron Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil (2005) debido a que no todas las categorías de calificación crediticia o no todos los sectores tenían la cantidad de datos suficiente para realizar el análisis.

Se llevó a cabo una primera simulación, tomando la tasa de recuperación propuesta por Frye (2000), Schuermann (2004), Altman y Kishore (1996), Acharya et al. (2004) y Hamilton et al. (2001), quienes asumen un valor genérico de 40%.

Los resultados del estadístico de prueba G para cada año fueron los siguientes (Tabla 3.6):

Tabla 3.6 Estadístico de prueba para los modelos BM y PLBM con R=0.4

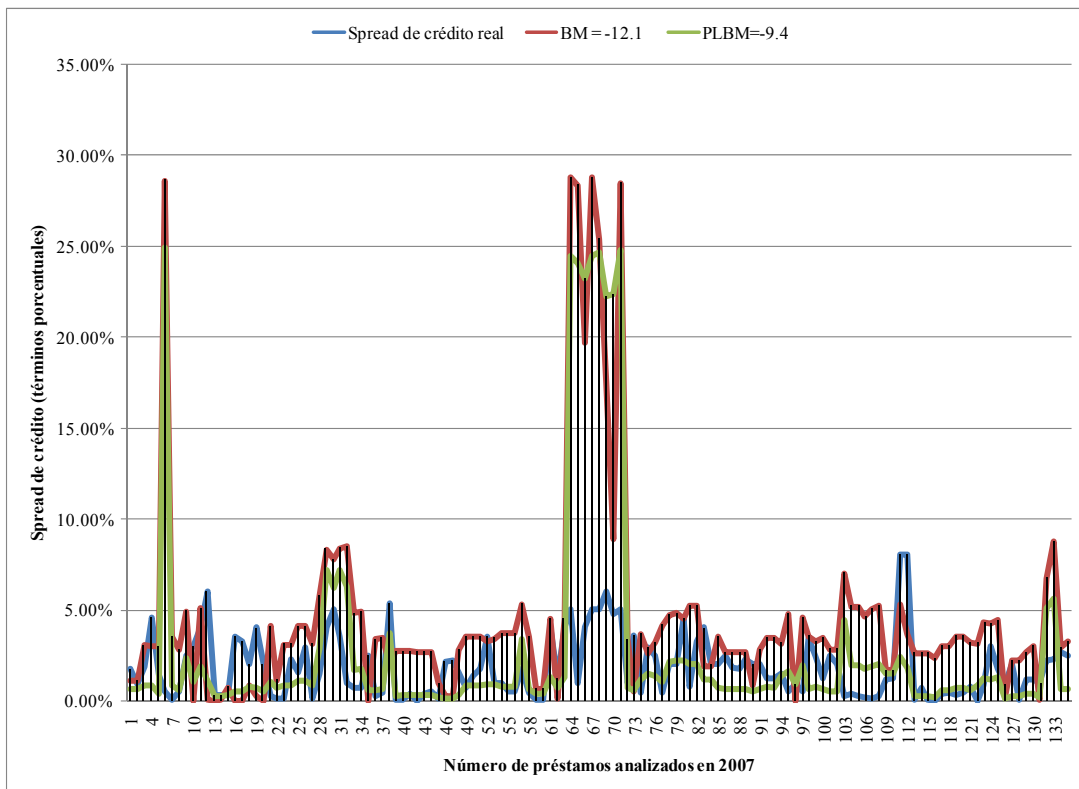
G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM
1998	1998	1999	1999	2000	2000	2001	2001	2002	2002
-1.22	0.05	-3.18	-7.83	-1.29	-1.56	-16.67	-9.62	-2.70	-2.93
2003	2003	2004	2004	2005	2005	2006	2006	2007	2007
-4.13	-5.58	-6.99	-10.86	-4.12	-6.59	-1.55	-1.95	-12.07	-9.42

El valor ideal de este estadístico es 1, y como se puede observar en la tabla anterior el valor estimado por ambos modelos se encuentra bastante alejado del *spread* real.

Este mismo análisis se puede ver gráficamente tomando como ejemplo el año de 2007 (ver Gráfica 3.2).

Como se puede observar en este gráfico, los valores pronosticados se encuentran muy lejanos de los *spread* reales establecidos para cada instrumento, y esta situación se corrobora al verificar el valor del estadístico de prueba para los modelos BM y PLBM, ya que para el primero la G es de -12.07, mientras que segundo el valor de este estadístico es de -9.4.

Gráfica 3.2 Comparación del *spread* real y el estimado con los modelos BM y PLBM con R=0.4 correspondiente al ejercicio de 2007



Considerando los resultados obtenidos, se realizaron otras simulaciones pero ahora tomando en cuenta diferentes aproximaciones de R. Primeramente, se consideraron valores arbitrarios de R: 8%; 12% y 22%. Posteriormente se determinaron los *spreads*, calculando las tasas de recuperación con las fórmulas (2.17), (2.23)-(2.25) descritas en la Sección 2.

Para calcular el valor de R con las fórmulas (2.23)-(2.25), se consideró el *spread* (s) real otorgado a cada préstamo para el periodo de 1998 a 2007; como probabilidad de *default* en el tiempo t (Q(t)) se tomó la probabilidad de *default* esperada a un año calculada para cada empresa con el sistema de Moody's (cabe aclarar, que en el caso de que una empresa contara con varios préstamos durante los ejercicios analizados, a cada una de sus deudas se les asignó la misma calificación crediticia y la misma EDF a 1 año otorgada por el sistema a la entidad de manera global) y finalmente como tasa libre de riesgo se consideró, de acuerdo con las especificaciones de cada deuda, la tasa base estipulada para cada uno de los préstamos descrita en los notas a los estados financieros (la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) a diferentes periodos, los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) a diferentes plazos, la Tasa de Interés Interbancaria de Londres conocida por sus siglas en inglés como LIBOR (*London InterBank Offered Rate*) a diferentes periodos y la Eurolibor anual).

Con estos datos, se obtuvo una R distinta para cada año y para cada instrumento de deuda a pesar de que estos instrumentos los hubiera emitido la misma entidad. Lo anterior se explica, entre otras razones por: el monto de la emisión, la fecha de vencimiento, la relación de los accionistas con el banco, pero en especial, por el grado de subordinación del pago de la deuda a los titulares con respecto a otros instrumentos de la entidad.

En términos generales, las deudas con una menor preferencia en el cobro (orden de prelación) poseen una tasa de recuperación menor y viceversa.

Hull (2007) presenta un estudio sobre las tasas de recuperación de los bonos corporativos como porcentaje del valor nominal realizado por la empresa calificadora de Moody's durante el periodo comprendido de 1982 a 2004, de acuerdo con el cual los bonos *senior* garantizados poseen una tasa de recuperación promedio de 57.4%, mientras que las deudas *junior* subordinadas tienen una tasa de recuperación promedio de 28.9% sobre su valor nominal.

A continuación se muestran la media, la mediana y la desviación estándar de los 10 años para las R's calculadas con la fórmula (2.24)³ segmentadas por *rating* (Tabla 3.7).

³ Se presentan los resultados de este modelo porque fue el que ofreció el mejor valor del estadístico de prueba G.

Tabla 3.7 Mediana, media y desviación estándar de la de R calculada con el modelo de intensidad de *default*

Calificación	Media	Mediana	Desviación estándar
Baa1y Baa2	38.94%	0.00%	43.08%
Baa3	16.19%	0.00%	31.79%
Ba1	15.87%	0.00%	29.25%
Ba2	20.43%	0.00%	27.46%
Ba3	15.20%	0.00%	27.76%
B1	35.12%	24.70%	34.55%
B2	42.23%	48.79%	33.05%
B3	57.71%	25.74%	57.71%
Caa-C	83.69%	89.65%	15.80%

De los resultados anteriores, se puede observar que la mediana más alta es la de los instrumentos con mayor riesgo (Caa), mientras que los instrumentos con menor riesgo son los que tienen una mediana que oscila entre el 0.00% y 0.79%. Lo cual puede originarse por el hecho de que de acuerdo con la fórmula (2.23), existe una relación inversamente proporcional entre la EDF y la R.

Con cada uno los escenarios de las tasas de recuperación se calcularon los modelos BM y PLBM así como la prueba de bondad de ajuste (G), obteniéndose como resultado lo mostrado en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8 Estadístico de prueba para los modelos BM y PLBM con diferentes R's

	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM
	1998	1998	1999	1999	2000	2000	2001	2001	2002	2002
R igual .08	-1.21	-0.03	-3.16	-16.23	-3.04	-4.28	-16.67	-8.48	-10.21	-8.06
R igual .12	-1.21	-0.02	-3.17	-15.08	-2.68	-3.88	-51.83	-19.92	-8.80	-7.08
R igual .22	-1.21	0.01	-3.17	-12.27	-1.99	-2.71	-35.90	-15.31	-5.96	-5.32
R igual .40	-1.22	0.05	-3.18	-7.83	-1.29	-1.56	-16.67	-9.62	-2.70	-2.93
R modelo intensity of default (2.23)	-1.20	0.41	-3.18	0.20	-1.01	-0.36	-1.87	0.53	-0.42	0.38
R modelo intensity of default (2.24)	-1.21	0.49	-3.19	0.37	-0.99	-0.34	-1.57	0.62	-0.34	0.41
R modelo intensity of default (2.25)	-1.20	0.45	-3.19	0.37	-0.99	-0.29	-1.61	0.61	-0.36	0.40
R modelo de Hamilton (2.17)	-1.20	-0.27	-3.16	-24.93	-3.47	-9.82	-74.54	-42.69	-12.17	-15.11

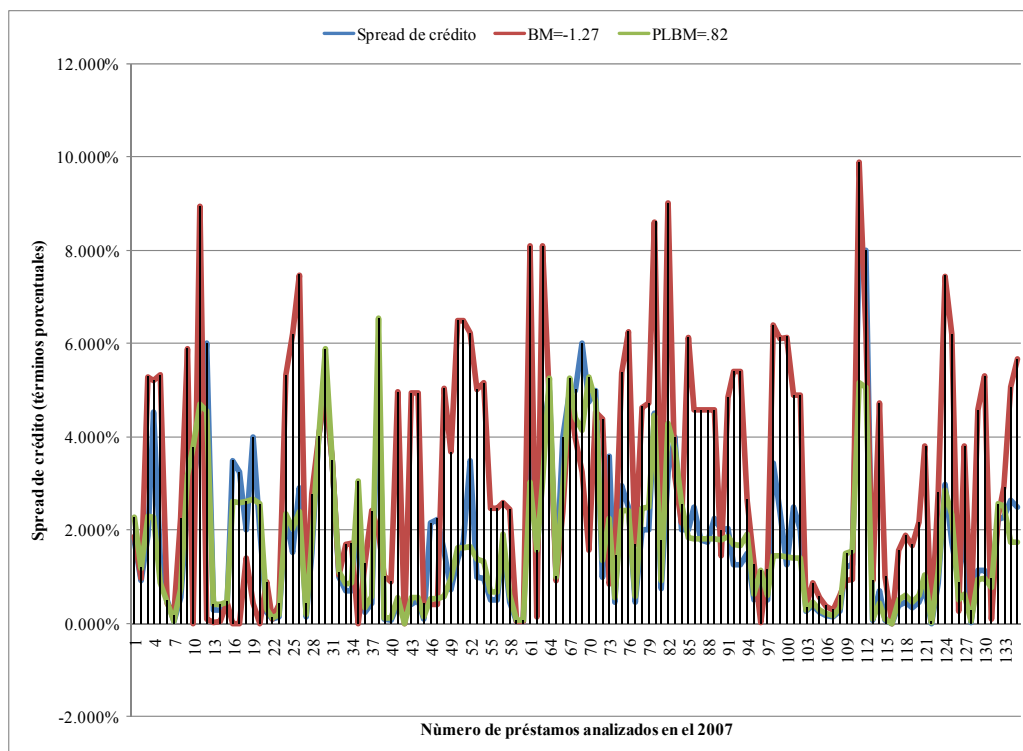
Tabla 3.8 Estadístico de prueba para los modelos BM y PLBM con diferentes R's
(continuación)

	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM	G BM	G PLBM
	2003	2003	2004	2004	2005	2005	2006	2006	2007	2007
R igual .08	-12.81	-22.77	-26.14	-33.93	-18.05	-22.61	-7.66	-4.52	-44.33	-23.17
R igual .12	-11.09	-19.15	-22.54	-29.22	-15.41	-19.34	-6.58	-4.22	-38.57	-20.42
R igual .22	-7.72	-12.50	-15.30	-21.14	-10.11	-13.36	-4.30	-3.23	-26.61	-16.56
R igual .40	-4.13	-5.58	-6.99	-10.86	-4.12	-6.59	-1.55	-1.95	-12.07	-9.42
R modelo intensity of default (2.23)	-3.08	0.30	-1.48	0.14	-1.92	0.26	-1.59	0.69	-1.27	0.82
R modelo intensity of default (2.24)	-2.99	0.36	-1.40	0.15	-1.61	0.33	-1.17	0.77	-1.14	0.85
R modelo intensity of default (2.25)	-3.01	0.33	-1.41	0.15	-1.71	0.28	-1.28	0.75	-1.15	0.85
R modelo de Hamilton (2.17)	-14.60	-48.60	-32.69	-65.48	-21.35	-47.45	-5.57	-8.46	-53.06	-50.49

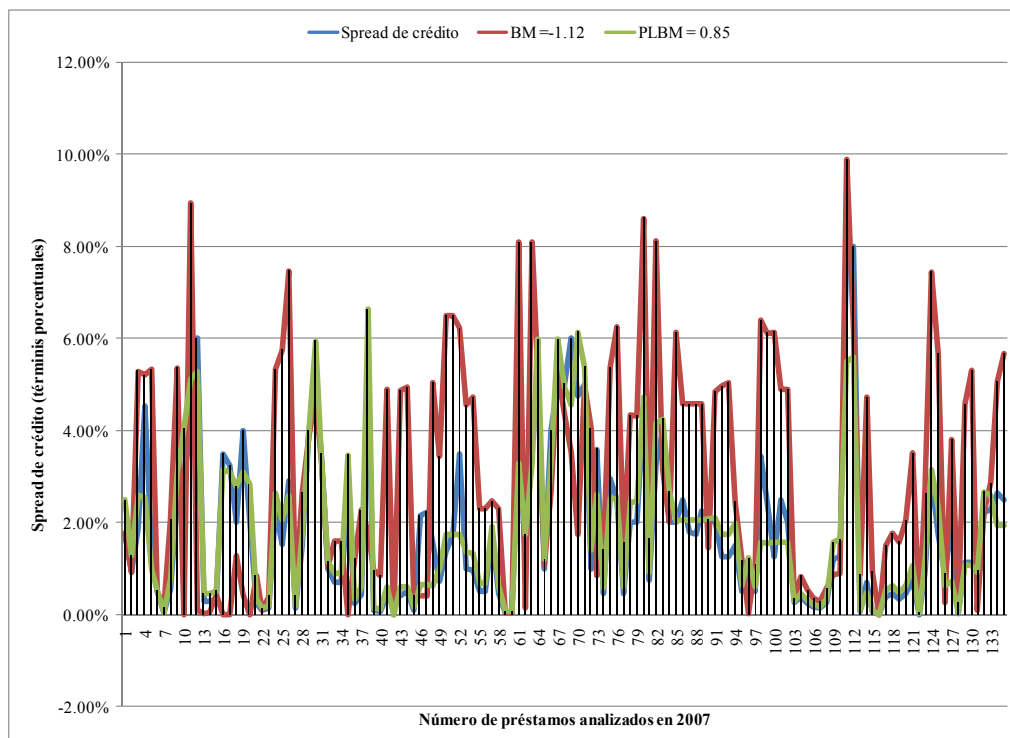
Como se puede derivar de la tabla anterior, la mayor parte de los resultados son negativos, lo cual implica que el ajuste no es bueno, sin embargo el escenario que presenta los mejores valores del estadístico de prueba G es cuando la R es calculada con la ecuación (2.24). Bajo este escenario, y consistentemente con los resultados obtenidos por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil, el modelo que ofrece el mejor ajuste es el PLBM; de hecho para el año de 2007 el valor de G del PLBM es de 0.85. Asimismo, el *spread* obtenido con el modelo de intensidad de *default*, aproximando la R con las fórmulas (2.23) y (2.25), fue bastante razonable y bajo las cuales también se concluye que el mejor ajuste lo ofrece el PLBM.

Los resultados obtenidos con la aproximación de la intensidad de *default* (ecuaciones 2.23 y 2.24) para el año de 2007 se muestran en los Gráficos 3.3 y 3.4, respectivamente.

Gráfica 3.3 Comparación del *spread real* y el estimado con los modelos BM y PLBM correspondiente al ejercicio de 2007 (R calculada con la intensidad de *default*, ec. 2.23)



Gráfica 3.4 Comparación del *spread real* y el estimado con los modelos BM y PLBM correspondiente al ejercicio de 2007 (R calculada con la intensidad de *default*, ec. 2.24)



Tanto en los gráficos previos como con los resultados presentados en la Tabla 3.6 sobre el estadístico G se puede observar que el ajuste con esta R es mucho mejor que bajo los otros escenarios, y sobre todo se corrobora que el modelo que aproxima en mayor medida al *spread* real es el PLBM.

Inferencia con el modelo PLBM

Como se explicó en la Sección 2, para el cálculo de la probabilidad *neutral* de *default* bajo el modelo PLBM se necesita estimar el valor de los parámetros c_i y α_i corriendo la regresión lineal explicada en la ecuación (2.32).

Los valores de estos parámetros derivados de la regresión, fueron los siguientes:

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
c_i	0.9352	0.9436	0.9194	0.9782	0.9427	0.9213	0.8923	0.9503	0.9608	0.9714
α_i	-0.0040	0.0160	0.0100	0.0140	0.0130	-0.0040	-0.0100	0.0210	-0.0070	0.0090

Para la realización de inferencia en periodos posteriores, se aplicaron los modelos de análisis de series de tiempo, con el objetivo de determinar si estas variables se comportan como un proceso Autorregresivo, de Promedio Móviles (MA) ó una combinación de ambos (ARMA)⁴.

Una vez realizado el análisis de las series de tiempo de c_i y α_i se concluyó que: la serie de c_i se comporta como un modelo AR de orden uno, mientras que la serie de α_i se compone como un proceso ARMA de orden dos.

A continuación se resumen los resultados de cada modelo.

<p>El modelo propuesto para c_i fue un AR(1)</p> $\tilde{Z} - \phi\tilde{Z}_{t-1} = a_t$ <p>a_t, son una serie de choques aleatorios independientes, con media constante cero y varianza constante igual a σ_a^2.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Periodo de observación: 1998 a 2007. • Los parámetros estimados fueron $\phi = 0.984917$, 	<p>El modelo propuesto para α_i fue un ARMA(2,2)</p> $\tilde{Z} - \phi_2\tilde{Z}_{t-2} = a_{t-1} - \theta_2a_{t-1}$ <p>a_t, son una serie de choques aleatorios independientes, con media constante cero y varianza constante igual a σ_a^2.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Periodo de observación: 1998 a 2007. • Los parámetros estimados fueron $\phi_2 = 0.77357$ y $\theta_2 = -0.98204$
--	--

Los valores estimados para los años de 2007 a 2010 de c_u y α_u bajo los modelos AR y ARMA fueron de:

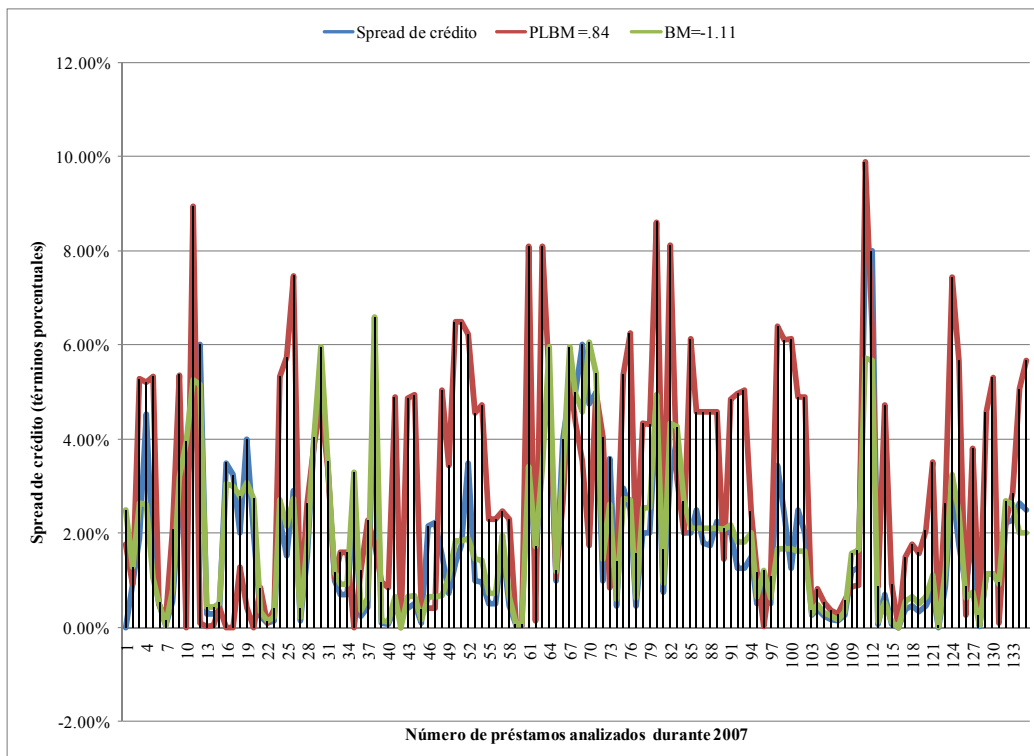
Año	α_u estimado	c_u estimado
2007	0.00155704	0.97540469
2008	0.01117567	0.97611164
2009	0.00861551	0.99808357
2010	0.01068856	0.97169857

⁴ Para mayor información sobre estos modelos consultar Guerrero (1991).

Se probaron los valores de estas variables estimadas con los datos del año de 2007, obteniendo como resultado un estadístico de prueba para el modelo PLBM de 0.840287, lo cual significa que también con los valores estimados se obtiene una aproximación bastante razonable con este modelo.

El ajuste que se hace de *spread* real de 2007 con estos valores pronosticados de c_u y α_u se puede ver gráficamente a continuación (Gráfica 3.5).

Gráfica 3.5 Comparación del *spread* real y el estimado con los modelos BM y PLBM correspondiente al ejercicio de 2007 con los valores estimados de c_u y α_u (R calculada con la intensidad de *default*, fórmula 2.24)



Como se comentó anteriormente, en México no se tiene acceso a una base de datos sobre las tasas de recuperación por tipo de préstamos, por lo cual, será necesario que las empresas que apliquen estos modelos en años posteriores estimen una *R*. Debido a lo cual, se llevaron a cabo seis regresiones.

La información se segmentó por calificación crediticia, con lo cual, se corrieron regresiones por *rating*, pero tomando la serie completa por el periodo comprendido de 1998 a 2007. Por ejemplo, se corrió la regresión considerando a todos los préstamos categorizados, como B1 durante los ejercicios de 1998 a 2007

El primer modelo aplicado fue el propuesto por Hamilton, Varma, Ou y Cantor (2005), para lo cual se corrió una regresión lineal entre las tasas de recuperación y las tasas de *default* neutral al riesgo.

Para el cálculo de dicho análisis se tomó como variable dependiente a la tasa de recuperación (R) determinada con la intensidad de *default* de la ecuación (2.21) y como variable independiente a la probabilidad de *default* esperada a un año.

$$\text{Modelo 1: } E(R|EDF) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left(\frac{1}{\ln(1-EDF)} \right) \quad (3.3)$$

Considerando que los valores de la variable dependiente (1-R_i) se encuentran en el rango de [0,1], se aplicó una regresión logística en el segundo y tercer análisis, como lo hicieron Das y Hanouna (2009). Para el caso del modelo 2 se tomó como variable independiente a la intensidad de *default* a un año (ver fórmula 2.21) mientras que en el modelo 3 la variable independiente fue la probabilidad de *default* esperada EDF a un año.

$$\text{Modelo 2: } E \left(\ln \left(\frac{1-R_i}{R_i} \right) \middle| \bar{\lambda}_p \right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{\lambda}_p \quad (3.4)$$

$$\text{Modelo 3: } E \left(\ln \left(\frac{1-R}{R} \right) \middle| EDF \right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 EDF \quad (3.5)$$

En los casos de la cuarta y quinta regresión, simplemente se suavizaron los datos de la variable dependiente aplicando una transformación potencia; la del modelo 4 fue logarítmica y la del modelo 5 fue de -1.

$$\text{Modelo 4: } E(\ln(1-R) | \bar{\lambda}_p) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{\lambda}_p \quad (3.6)$$

$$\text{Modelo 5: } E \left(\frac{1}{1-R} \middle| \bar{\lambda}_p \right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{\lambda}_p \quad (3.7)$$

Finalmente, el sexto modelo de regresión, también se efectuó bajo la premisa de que la variable dependiente, se encuentra en el intervalo [0,1]. Dado lo cual, otro de los modelos propuesto por Das y Hanouna (2009) consiste en el ajustar la tasa de recuperación como una función probit, quedando de la siguiente manera:

$$\text{Modelo 6: } E \left(\Phi^{-1}(1-R) \middle| \bar{\lambda}_p \right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{\lambda}_p \quad (3.8)$$

El modelo que ofreció los mejores estadísticos de la regresión fue el 2, sin embargo la bondad de ajuste promedio de todas las calificaciones crediticias fue de 11%.

A continuación, se muestra de forma detallada los estadísticos de la regresión de los modelos de Hamilton y de la regresión logística.

Tabla 3.9 Estadístico de las regresiones para pronosticar la R (tasa de recuperación) en función de la probabilidad de *default*. Modelo de Hamilton

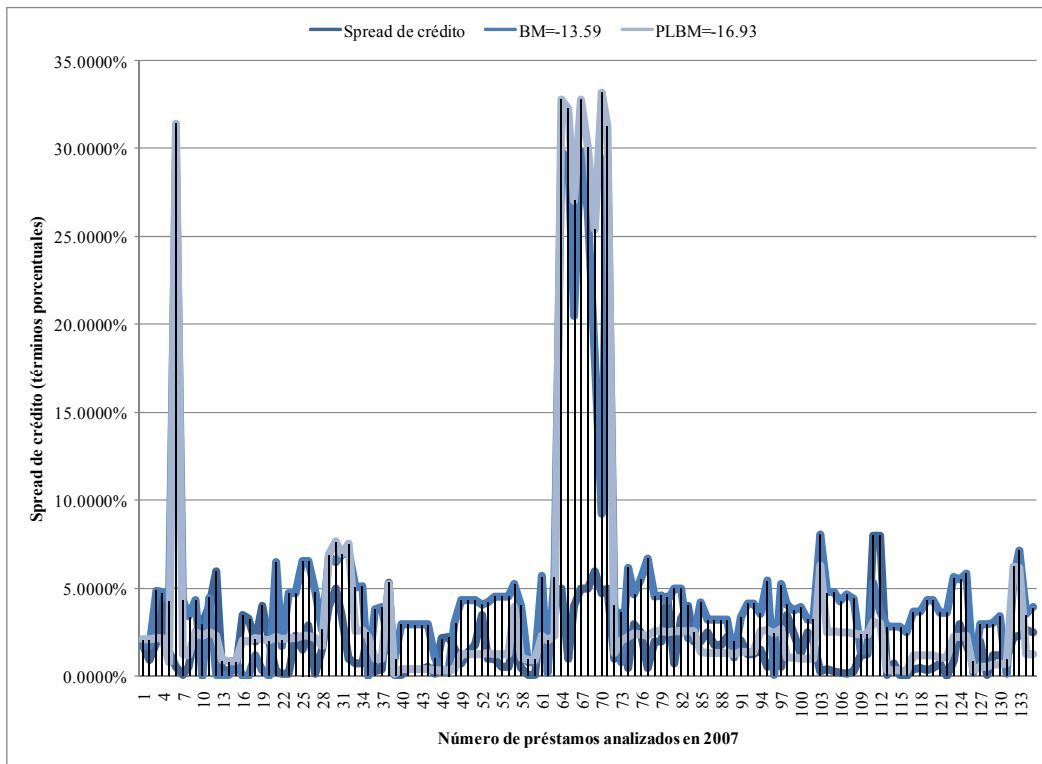
Calificación	Número de datos	Constante	Coefficiente de la tasa de <i>default</i>	Prueba t (<i>p value</i> del coeficiente de la prob. de <i>default</i> , con un alfa del 5% de confianza)	R ² (Bondad de ajuste)	Prueba F (<i>p value</i> nivel de significancia con un alfa al 5% de confianza)
Baa1y Baa2	39	.427	.000	.390 (0.698*)	.004	.152 (0.698*)
Baa3	47	.086	.000	-.391 (0.698*)	.003	.153 (0.698*)
B1	178	.025	-.014	-12.423 (.000000)	.467	154.341 (0.0000)
B2	108	.222	-.005	-1.197 (0.234*)	.013	1.433 (0.234*)
B3	99	.440	.004	.398 (0.691*)	.002	.159 (0.691*)
Ba1	114	.190	.000	-.485 (0.628*)	.002	.236 (0.628*)
Ba2	204	.409	.002	1.684 (0.094*)	.014	2.837 (0.094*)
Ba3	244	.849	.013	4.022 (0.000)	.063	16.176 (0.000)
Caa-C	107	.359	-.015	-1.362 (0.176*)	.017	1.856(.176*)

*Con un nivel de confianza del 5% ó del 10% los estadísticos F y t resultan no significativos, es decir, no se puede rechazar la hipótesis nula de que los coeficientes de las variables independientes sean diferentes de cero.

De acuerdo con los resultado de la tabla anterior, se puede observar que la bondad de ajuste de los modelos es bastante baja (R²) en todos los casos. Asimismo en la mayor parte de las categorías los coeficientes de la tasa de *default* resultaron no significativos.

Sin embargo, se decidió probar los resultados de las regresiones sobre los datos de 2007 sustituyendo las probabilidades esperadas de *default* en cada una de las regresiones, de acuerdo con la categoría a la que pertenecía cada préstamo, como resultado se obtuvo una R pronosticada, con la cual se calcularon los modelos BM y PLBM. Obteniéndose como resultado lo siguiente (Gráfica 3.6):

Gráfica 3.6 Comparación del *spread real* y del estimado con los modelos BM y PLBM correspondiente al ejercicio de 2007 con los valores de R calculados con el Modelo de Hamilton



De acuerdo con los valores de la R calculados con la regresión propuesta por Hamilton, se puede desprender que el *spread* calculado para el BM y el PLBM se encuentran bastante alejados del *spread* real, ya que el valor del estadístico G es de -13.59 y de -16.93, respectivamente.

Considerando la regresión logística, se puede observar en la Tabla 3.10 que la bondad de ajuste oscila en el rango de 0.42 para los instrumentos calificados con Caa hasta un 0.014 en las deudas catalogadas como Baa1 y Baa2.

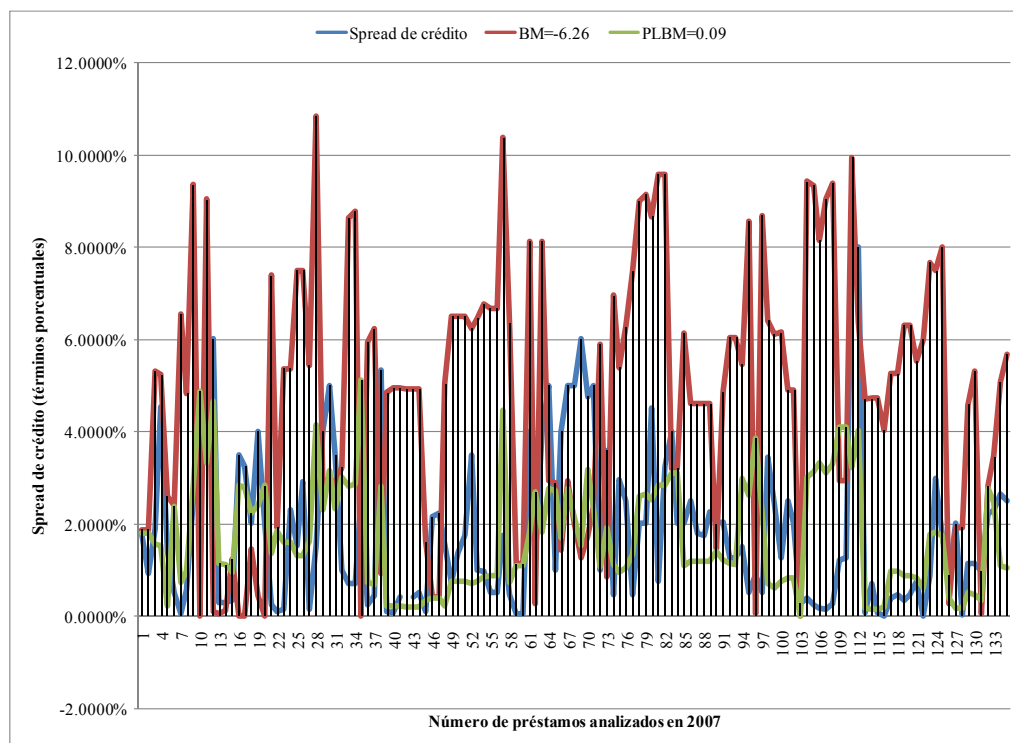
Asimismo, cabe destacar que únicamente para los pasivos clasificados como Baa1, Baa2 y Baa3 el coeficiente de la variable independiente no es significativo con un alfa del 5% de confianza.

3.10 Estadístico de las regresiones para pronosticar la R (tasa de recuperación) en función de la probabilidad de *default*. Modelo de regresión logística (Modelo 2)

Calificación	Número de datos	Constante	Coficiente de la tasa de <i>default</i>	Prueba t (p value del coeficiente de la prob. de <i>default</i> , con un alfa del 5% de confianza)	R ² (Bondad de ajuste)	Prueba F (p value nivel de significancia con un alfa al 5% de confianza)
Baa1 y Baa2	39	21.955	17162.475	1.567 (0.124*)	0.014	2.456 (0.124*)
Baa3	47	0.086	0	-0.391 (0.698*)	0.052	153 (0.698*)
B1	178	231.41	-6376.277	-7.648 (0.000)	0.249	58.498 (0.000)
B2	108	83.5	-1066.397	-2.304 (0.023)	0.048	5.309 (0.023)
B3	99	34.773	-342.847	-2.036 (0.044)	0.041	4.147 (0.044)
Ba1	114	156.069	-3830.263	-3.652(0.000)	0.107	13.334 (0.000)
Ba2	204	102.889	-1811.145	-3.105 (0.002)	0.046	9.638 (0.002)
Ba3	244	175.358	-4087.39	-2.2690(0.024)	0.021	5.150 (0.024)
Caa-C	107	-0.525	-5.596	-8.571 (0.000)	0.412	73.456 (0.000)

Al igual que para el caso anterior, se probaron los resultados de las regresiones sobre los datos de 2007 sustituyendo las probabilidades esperadas de *default* en cada una de las regresiones, de acuerdo con la categoría a la que pertenece cada préstamo, con lo que se calcularon los modelos BM y PLBM (Gráfica 3.7).

Gráfica 3.7 Comparación del *spread real* y del estimado con los modelos BM y PLBM correspondiente al ejercicio de 2007 con los valores de R calculados con el Modelo de 2 de regresión



De acuerdo con los resultados del gráfico previo, se puede observar una mejora en el *spread* calculado para ambos modelos, sobretodo en para el caso del PLBM el valor del estadístico G alcanzó un valor positivo de 0.09.

6. Conclusiones y Futuras líneas de investigación

Considerando en primera instancia que el objetivo de este trabajo era encontrar un modelo que pudiera ser aplicado por las entidades mexicanas que no tienen acceso a una calificación crediticia, con base en la cual puedan establecer una tasa de interés que realmente refleje el costo de oportunidad de sus instrumentos, se evaluaron tres modelos que pudieran otorgar una solución a este problema.

Para lo cual se analizaron tres modelos: el primero fue desarrollado por Merton (1974), mediante el cual se pueden obtener las probabilidades neutrales de *default* así como los *spread* de crédito que deben ser adicionados a la tasa base. Posteriormente, se aplicaron los modelos propuestos por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil (2005), por medio de los cuales se puede convertir la frecuencia de *default* en una probabilidad neutral al riesgo de *default* y ésta a su vez en un *spread* de crédito. Estas herramientas poseen características tanto de los modelos estructurales como de los modelos de forma reducida (*reduced-form setting*). El primero de ellos es el *Brownian Motion Model* (BM) y el segundo es el *Power Law Brownian Motion Model* (PLBM).

Estos dos últimos modelos necesitan de una base de datos desarrollada por Moody's, con la cual se puede determinar la EDF. Este sistema puede ser adquirido por cualquier empresa privada y simplemente se necesita introducir cierta información, la cual se encuentra contenida completamente en los estados financieros de la entidad de la cual se quiere conocer su calificación crediticia y su probabilidad de *default*. Sin embargo prevalece el problema de convertir esta probabilidad de *default* en un *spread* de crédito, el cual debe ser adicionado a una tasa base libre de riesgo.

De acuerdo con la información del mercado mexicano, se llegó exactamente a la misma conclusión alcanzada por Denzel, Dacoronga, Müller y McNeil, es decir, el modelo que aproxima en mayor medida el *spread* de crédito real es el PLBM, mientras que de acuerdo con el análisis realizado, el que presentó el peor ajuste y que adicionalmente, resultó ser el menos aplicable por requerir de información de mercado, lo cual representa la principal limitante para el caso mexicano y del cual partió la presente investigación, fue el modelo de Merton.

Asimismo, se pudo observar en los resultados de los modelos BM y PLBM y por consecuencia el valor del estadístico de prueba (G) dependen fuertemente de la tasa de recuperación promedio de los préstamos. Por lo que en el presente trabajo se probaron seis modelos de regresión simple, entre ellos los de Hamilton, Varma, Ou y Cantor (2005) y de Das y Hanouna (2009), tomando como variable explicada a la tasa de recuperación. Derivado de este análisis se llegó a la conclusión de que la R no es una constante, por el contrario es una variable aleatoria que depende de las características del instrumento (*senior* o *junior*) así como de la probabilidad de *default*. Asimismo, se observó que el mejor ajuste se obtiene aplicando una regresión logística sobre estos datos, con lo cual las empresas privadas podrán aproximar su tasa de recuperación.

Por lo cual, para las entidades que quieran aplicar este modelo para fijar los *spreads*, se recomienda utilizar los resultados del modelo 2 (modelo de regresión logística) o bien, tomar como referencia el costo de la deuda de las empresas públicas similares o los costos promedio ponderados de la deuda de la industria donde se encuentre la entidad bajo análisis y con ese dato calcular una R aproximada. Este caso pudiera ser analizado en investigaciones futuras.

Otro punto que resulta importante destacar para el caso mexicano y que resaltó al haber analizado empresas públicas, es que no existe una relación directamente proporcional entre el *spread* de crédito real asignado a los instrumentos o el costo total de la deuda y la calificación crediticia obtenida en el modelo, como se pudo observar en las Tablas 3.3 y 3.4, lo cual tiene su origen en la falta de pulverización, liquidez y eficiencia del mercado de capitales mexicano.

De hecho, de acuerdo con Salas-Porras (1992) en México “todavía existe una alta concentración de capital en unas cuantas familias, que incluso en la actualidad temen perder el control del capital. A pesar de participar en el mercado de valores, el capital de los grupos económicos más grandes pertenece a una familia en proporciones no menores al 60%-70%, en la mayor parte de los casos”.

Asimismo esta autora comenta que las grandes necesidades financieras obligan a volverse públicas a las empresas y a circular acciones en los mercados nacionales e internacionales. Este proceso se acelera aún más debido a la interacción con agencias gubernamentales e internacionales cada vez más complejas que disponen de redes de información privilegiadas; con estructuras corporativas que participan en el proceso de toma de decisiones; con la fuerte competencia nacional e internacional así como con la globalización y acuerdos internacionales de diferentes tipos.

Para el caso mexicano, este proceso de bursatilización se encuentra muy retrasado en relación con el que se observa en los países industrializados, lo cual no resulta inesperado, dadas las peculiaridades del desarrollo capitalista en México.

Adicionalmente, la falta de ahorro y la escasez de fondos prestables en los mercados financieros internos favorecieron y han favorecido actualmente el establecimiento de vínculos muy estrechos entre bancos y empresas industriales, de esta forma los grandes empresarios garantizan su acceso al capital.

Estas características del mercado mexicano y el costo de las fuentes de financiamiento, también puede ser objeto de futuras investigaciones.

Finalmente, también se podrían evaluar para el caso mexicano otros modelos estructurales para la fijación de los *spreads* de crédito, como son los de Leland (1994) y Fan y Sundaresan (2000), los cuales fueron evaluados por Teixeira (2005) en el mercado de deuda estadounidense y ofrecieron resultados más satisfactorios que los obtenidos con el modelo de Merton.

7. Bibliografía

- Acharya, V. V., Bharath, S.T., y Srinivasan, A. (2004). Understanding the Recovery Rates of *Default* Securities. Working Paper, London Business Scholl, University of Michigan, University of Georgia.
- Agrawal, Anup y Nagarajan, Nandu. (1990). Corporate Capital Structure, Agency Costs, and Ownership Control: The Case of All-Equity Firms, *Journal of Finance* 45.

- Altman, E. y Kishore, V. (1996). Almost Everything You Wanted to Know About Recoveries of *Default* Bonds. *Financial Analyst Journal*, pages 57-64.
- Altman, E. Brady, A. Resti A y Sironi, A. (2005). The Link between *Default* and Recovery Rates: Implications for Credit Risk Models and Procyclicality. Working Paper, New York University.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81. (May/June), 637-659.
- Bollerslev, J. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasty. *Journal of Econometrics* 31, 307-27.
- Cox, J., S. Ross, y M. Rubinstein (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics* 7, 229-263.
- Crosbie, P. y Bohn, J. (2003). Modeling *Default* Risk-Modeling Methodology. Moody's KMV Company LLC.
- Das, S y Hanouna, P. (2009). Implied Recovery. Working Paper. Santa Clara University, Leavey School of Business.
- Delianedis, Gordon y Geske, Robert (1999). Credit Risk and Risk Neutral *Default* Probabilities: Information about Ratings Migrations and *Defaults*. The Anderson School at UCLA.
- De Lara Haro, Alfonso (2002). Medición y control de riesgos financieros. 2da. edición, Editorial Limusa. México.
- Denzler, Stefan M., Dacorogna, Michel M., Müller, Ulrich A. y McNeil, Alexander J. (2005). From *Default*. Probabilities to Credit *Spreads*: Credit Risk Models Do Explain Market Prices.
- Du, Yu (2003). Predicting Credit Rating and Credit Rating Changes: A new Approach. Queen's School of Business.
- Enders, Walter (1995). Applied Econometric Time Series. *John Wiley & Sons, Inc.*
- Frye, J. (2000). Depressing Recoveries. Working Paper, Federal Reserve Bank of Chicago.
- Graham, John; Campbell, Harvey. (2001). The Theory of Corporate Finance. *Journal of Financial Economics*.
- Guerrero, V. (1991). Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas. UAM. México.
- Hamilton, D.T., Gupton, G. y Berthault, A. (2001). *Default* and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers: 2000. Moody's special comment, Moody's Investors Service, Global credit Research.
- Hamilton, D.T., Varma, S. Ou, S. y Cantor, R. (2005). *Default* and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers. Moody's special comment, Moody's Investors Service, Global credit Research.
- Hernández, J. (2009). Apuntes Finanzas III. Instituto Tecnológico Autónomo de México. México.
- Hu, W. (2004). Applying the MLE Analysis on the Recovery Rate Modeling of US Corporate Bonds, Master's Thesis in Financial Engineering, UC Berkeley.
- Hull, J.C. (2008). Options, Futures and Other Derivates. Prentice-Hall, 7th. edition.
- Hull, J.C. (2007). Risk Management and Financial Institutions. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, first edition, international edition.
- Kealhofer, S y Vasicek, O. (2003). Quantifying Credit Risk I: Default Prediction. *Financial Analysts Journal*. Vol. 59, No. 1. pp. 30-44
- Merton, R. (1974). On Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 29, 449-470.
- Pliska, Stanley R. (1998). Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models. Blackwell Publishers Inc.

- Salas-Porras, Alejandra. (1992). Globalización y proceso corporativo de los grandes grupos económicos en México. *Revista Mexicana de Sociología*. vol. 54, no. 2, pp. 133-162.
- Ross, Stephen A. (2005), et.al. *Corporate Finance*. McGraw-Hill Irwin. 7a. edición. EUA.
- Teixeira, J. (2005). *An Empirical Analysis of Structural Models of Corporate Debt Pricing*. Lancaster University Management School.
- Trigeorgis, Lenos. (1999). *Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Fourth printing. The MIT Press.
- Useem, Michael. (1980). Corporations and the corporate elite. *Ann. Rev. Sociol.* vol. 6, pp. 41-77.